

SUJETS DE THÈSE PROPOSÉ PAR M. E. H. EL ABDALAOU

M. E. H. EL ABDALAOU**.

** *Université de Rouen Normandie*
LMRS UMR 60 85 CNRS
Avenue de l'Université, BP.12
76801 Saint Etienne du Rouvray - France .
e-mail : elhoucein.elabdalaoui@univ-rouen.fr

1. LA CONJECTURE DE SARNAK POUR LES LOCAL DENDRITES ET LOCAL COMPACT.

Le but principal de ce sujet est d'explorer de nouvelles voies techniques pour appréhender dans le cadre des local dendrites et local compact la conjecture de Sarnak concernant le comportement dynamique de la fonction de Möbius et celle de Liouville.

Un dendrite est un ensemble métrique compact connexe et localement connexe dans lequel on peut toujours séparer deux points distincts par un troisième point. Autrement dit, si u et v sont deux points distincts alors il existe w et deux voisinages ouverts disjoints U et V de u respectivement v tel que l'ensemble privé de w est une union de U et V . On définit aussi l'ordre d'un point comme étant le nombre de composante connexe de l'ensemble privé de ce point. Si l'ordre d'un point est 1 on dit que c'est un point point extrémal. Si l'ordre est 2, le point est dit régulier sinon c'est un point de branchement. Un dendrite est dit de Gehman si l'ensemble des points extrémaux est fermé.

Une local dendrite est un ensemble métrique compact connexe et localement connexe dans lequel chaque point admet un voisinage qui est une dendrite. Il résulte qu'une local dendrite est espace métrique qui contient un nombre fini de cercle. On rappelle qu'un espace est localement compact est espace topologique de Hausdorff dans lequel chaque point admet un voisinage compact.

La fonction de Möbius est intimement liée à la fonction de Liouville et cette dernière se définit par 1 si le nombre de facteur premier de l'entier est pair et -1 sinon. En fait, sur son support qui est l'ensemble des entiers sans facteur carré, la fonction de Möbius coïncide avec la fonction de Liouville.

Un entier est sans facteur carré si sa décomposition en facteurs premiers ne contient aucun carré. La conjecture de Sarnak affirme que les moyennes statistiques ou les moyennes de Césaro le long de l'orbite d'un point x générée par une transformation d'entropie topologique est nulle et pondérée par la fonction de Möbius converge vers zéro. La recherche actuelle autour de cette conjecture est très active. Pour pouvoir établir cette conjecture, il se trouve qu'il suffit de montrer qu'elle a lieu pour les dendrites de Gehman d'entropie nulle.

Il s'agit alors d'explorer les travaux réalisés sur les sujets [2], [3], [4], [?] et d'effectuer une synthèse en contribuant avec des nouvelles démonstrations et des investigations nouvelles autour du comportement dynamiques de la fonction Möbius par rapport à la classe des systèmes dynamiques générés par les locales dendrites et les espaces localement compact.

ENGLISH VERSION : CHOWLA AND SARNAK CONJECTURES ON THE MÖBIUS FLOW.

The main purpose is to investigate the state-of-art and a new directions concerning Sarnak conjecture on the dynamics of the Möbius and Liouville function for the class of local dendrites and locally compact space .

The dendrite is a connected compact metric space X for which for any two distinct points u, v there exist a point w in X such that one can write $X \setminus \{w\}$ as union of U and V with U and V are open disjoint neighborhoods of u and v respectively. If the property holds for a more general topological space, the space is called dendron. For any point x of X , we defined also its *order* as the number of connected component of $X \setminus \{x\}$. If the order is one then the point is called endpoint. If the order is 2, the point is called regular point, if not the branch point. The dendrite is called Gehman dendrite if the set of its endpoints is closed.

By a local dendrite, we mean a continuum every point of which has a dendrite neighborhood. A local dendrite is then a locally connected continuum containing only a finite number of circles. We recall that the Hausdorff topological space is locally compact if every point has a compact neighborhood

The Liouville function is defined as 1 if the number of the prime factor of the integer is even and -1 if not, and the Möbius function coincide with the Liouville function on the subset of squarefree integers. The integer is squarefree if its prime decomposition does not contain any square.

Sarnak's conjecture state that the statistic average or Césaro average along a orbit of any point x with respect to any transformation with topological entropy zero pondered with the Möbius function converge to zero. It is turns out that it is suffice to establish that the conjecture holds for the Gehman dendrites with zero entropy.

Sarnak conjecture has recently attracted very active interest and there are several works on the subject nowadays. But according to the previous result, the main goal is to produce a synthesis on the dynamical and arithmetical view for the class of the locally dendrites and locally compact space [2], [3], [4], [1] . Furthermore, to contribute with a new proofs and to explore a new directions as their behavior with respect to the dynamical systems generated by the dendrites and dendron.

REFERENCES

- [1] el H. el Abdalaoui & C; Silva, Möbius random law and infinite rank-one maps, arXiv:2203.14971 [math.DS].
- [2] el H. el Abdalaoui, Ghassen Askri, Habib Marzougui, Mobius disjointness conjecture for local dendrite maps, Nonlinearity 32 (2019), no. 1, 285-300.
- [3] Jian Li, Piotr Oprocha, Guohua Zhang, On dynamics of quasi-graph maps, Nonlinearity 35 (2022), no. 3, 1360?1379.
- [4] E. Glasner and M. Megrelishvili, Group actions on treelike compact spaces, arXiv:1806.09876v2 [math.DS].