Proposition de sujet de mémoire de Master 2ème année
Enveloppes convexes de marches au hasard

- Encadrant : Pierre Calka
- Lieu : Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR 6085, Université de Rouen Normandie
- Durée : de 4 à 6 mois

Le sujet a trait au domaine des probabilités géométriques, c'est-à-dire l'étude de modèles spatiaux aléatoires dans un espace euclidien ou métrique. Le modèle dont il est question ici peut se décrire simplement : on se donne une suite $\{\xi_n : n \geq 1\}$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, qui sont indépendants et identiquement distribués. On construit la marche au hasard associée, soit la suite des sommes partielles $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $n \geq 1$ avec la convention $S_0 = 0$. On s'intéresse à l'ensemble $\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ des positions du marcheur au bout de n pas et plus particulièrement on considère son enveloppe convexe C_n qui est le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$ contenant $\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$. Cette enveloppe C_n est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^d$ dont les caractéristiques combinatoires (nombre de sommets, d'arêtes, de faces k-dimensionnelles avec $0 \leq k \leq d$) et les caractéristiques géométriques (volume, aire du bord...) sont des variables aléatoires réelles intéressantes à étudier.

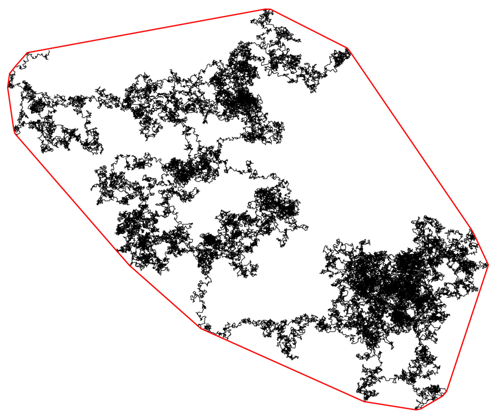

Figure 1 – Simulation d'une enveloppe convexe d'une marche au hasard dans le plan réalisée par Andrew Wade et Chang Xu [4]

Le cœur du travail consistera à faire la lecture approfondie de l'article très récent [2] dû à Z. Kabluchko, V. Vysotsky et D. Zaporozhets et dans lequel en particulier, une formule explicite est établie pour l'espérance du nombre de faces k-dimensionnelles de C_n. La démonstration repose sur le calcul de la probabilité d'absorption de l'origine par une enveloppe de plusieurs marches. Elle fait suite et étend le travail précurseur de S. Andersen sur le maximum d'une marche au hasard uni-dimensionnelle. Notons que des liens existent aussi avec d'autres modèles probabilistes, comme celui des permutations aléatoires.

De nombreuses questions ouvertes découlent de cet article et pourront être abordées dans un deuxième temps, notamment la loi limite du nombre de faces ou l'espérance d'autres caractéristiques comme par exemple ce qu'on appelle en géométrie convexe les volumes intrinsèques. Une étude de la grande dimension serait certainement intéressante également. Ces problèmes pourront être abordés dans un premier temps à l'aide de simulations réalisées avec les logiciels de calcul Matlab ou Scilab. On pourra enfin relier le modèle au cas des polytopes aléatoires en géométrie stochastique, traités notamment dans le compte-rendu [3].

Références

[1] S. Andersen (1953). On the fluctuations of sums of random variables I. *Math. Scand.*, **1**, 263–285.

[2] Z. Kabluchko, V. Vysotsky & D. Zaporozhets (2017). Convex hulls of random walks : Expected number of faces and face probabilities. Advances in Math., **320**, 595–629.

[3] M. Reitzner (2010). Random polytopes. New perspectives in stochastic geometry, Oxford Univ. Press, Oxford, 45–76.

[4] A. Wade & C. Xu (2015). Convex hulls of random walks and their scaling limits, Stoch. Proc. Appl., **125**, 4300–4320.