

Résultats typiques et extrémaux pour des interfaces convexes aléatoires

Partie 4

GT Pola, 29/03/21

1. Modèle et résultats

$K_\lambda = \text{Gns}(\mathcal{P}_\lambda \cap K)$, \mathcal{P}_λ PPP(λ), K corps convexe de \mathbb{R}^d

ou on lobi de l'aire maximale d'une facette de K_λ

2. Volume d'un simplexe aléatoire dans la boule-unité

X_1, \dots, X_{d+1} iid unif dans B^d , v_d = vol du simplexe régulier inscrit dans B^d

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\text{Gns}(X_1, \dots, X_{d+1})) \geq v_d(1-\epsilon)) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} C_d \epsilon^{\gamma_d} \text{ avec } \gamma_d = \frac{d^2 + 5d + 2}{4}$$

3. Aire d'une facette typique de K_λ

$$Z_\lambda = \mathbb{E}(\#\text{facettes de } K_\lambda) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} C_d \Omega(K) \lambda^{\frac{d-1}{d+1}} \quad \tilde{F}_\lambda = \text{facette typique de } K_\lambda$$

$$\begin{aligned} Z_\lambda \mathbb{P}(\text{aire } (\tilde{F}_\lambda) > t_\lambda) &= \mathbb{E} \left(\prod_{F \text{ facette de } K_\lambda} \mathbb{I}_{\text{aire}(F) > t_\lambda} \right) \\ &= \frac{\lambda^d}{d!} \int \mathbb{P}(\text{calotte vide}) \prod_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ \text{vol}_{d-1}(\text{Gns}(x_1, \dots, x_d)) > t_\lambda}} dx_1 \dots dx_d \end{aligned}$$

$$dx_1 \dots dx_d = (d-1)! \cdot V_{d-1} \left(\text{Gns}(x_1^H, \dots, x_d^H) \right) dx_1^H \dots dx_d^H \, dH$$

$H = H(z, h)$, $z \in \partial K$ tq l'hyperplan d'appui en z // H , le plus proche.
 $h = \text{dist}(H, \text{hyperplan d'appui en } z)$.

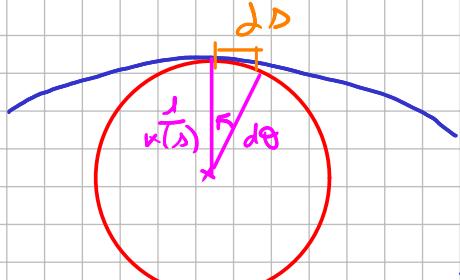
$$dH = dh \, d\sigma_{d-1}(u) \quad \text{rect en bas tangent } \perp H.$$

meilleur unif sur S^{d-1}

$$\text{Or } d\sigma_{d-1}(u) = \kappa(z) dz.$$

(en dim 1, Θ = angle entre l'horizontale et le vect normal tangent en z)
 s = abscisse curvilligne.

displacement infinitésimal le long de la courbe $ds = \frac{1}{\kappa(s)} d\theta$



$$\text{Donc } Z_\lambda \mathbb{P}(\text{aire } (\tilde{F}_\lambda) > t_\lambda) = \frac{\lambda^d}{d!} \int_{z \in \partial K} \kappa(z) e^{-\lambda \varphi_z(h)} \left(\varphi_z'(h) \right)^{d+1} V_z(h, t_\lambda) dz dh$$

$\varphi_z(h) = \text{Vol}_d(\text{calotte } K \cap H^+(z, h))$ où $H^+(z, h)$: $\frac{1}{2}$ -espace bordé par $H(z, h)$ contenant z

$h_z(t_\lambda) = \inf \{ h \geq 0 : K \cap H(z, h) \text{ contient un simplexe d'aire } t_\lambda \}$

$V_z(h, t_\lambda) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_{X > \frac{t_\lambda}{\varphi_z'(h)}})$ où X = aire renormalisée du simplexe formé par d pts iid emf des $K \cap H(z, h)$

Reviens où vient $\varphi'_z(\lambda)^{d+1}$?

$$6 \int_{\Omega} \int_{\Omega} e^{-\frac{\lambda}{\varphi_z(\lambda)} \varphi'_z(\lambda)^{d+1}} \left[\frac{\sin(\text{Gau}(n_1^H, \dots, n_d^H))}{n_1 - n_d} \right] \frac{dn_1^H \dots dn_d^H}{\varphi_z(\lambda)^d} d\lambda$$

aire du complexe renormalisé

meilleur proba uniforme sur la section $H(z, \Omega) \cap K$ dans $\varphi'_z(\lambda)$

Asymptotiques: $t_\lambda = \lambda^{-\frac{d+1}{d-1}} (c_0(c_1 \log \lambda + c_2 \log \log \lambda + c_3 + z))^{-\frac{1}{d-1}}$

$$\varphi_z(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{c_d}{\sqrt{k(z)}} \lambda^{\frac{d+1}{2}}$$

$$h_z(t_\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_z^{-1}\left(\frac{\kappa_{d-1}}{\sigma_{d-1}} t_\lambda\right) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{k(z)} t_\lambda}{\sigma_{d-1}}\right)^{\frac{2}{d-1}}$$

$V_z(\lambda, t_\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{E}\left(X \frac{t_\lambda}{\varphi_z(\lambda)}\right)$ avec X = aire renormalisée du complexe formé par d pts iid uniformes dans B^{d-1}

t_λ choisi tel que $\frac{t_\lambda}{\varphi_z(\lambda)} \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sigma_{d-1}}{\kappa_{d-1}} (1-\varepsilon)$

À cause du terme exp, l'intégrande est maximale pour $h = h_z(t_\lambda)$

$$-\lambda \varphi_z(h_z(t_\lambda)) \sim -\lambda \frac{c_d}{\sqrt{k(z)}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d+1}{2}} \left(\frac{\sqrt{k(z)} t_\lambda}{\sigma_{d-1}}\right)^{\frac{d+1}{d-1}}$$

On obtient : λ dépend de t_λ à exp \downarrow en $k(z)$. Les $k(z)$ minimales sont très significatives

- $\kappa(z)$ à puissance $\frac{1}{2} \left(\frac{d+1}{d-1} - 1\right) > 0$

On obtient une exp \downarrow en $k(z)$. Les $k(z)$ minimales sont très significatives

On applique maintenant une méthode de Laplace.

On fait le chgt de var $\Delta = \lambda (\varphi_z(h) - \varphi_z(h_z(t_\lambda)))$
(λ remplacé par ν)

6m attend.

- régime du loi en loi de arie (F_{t_2}).

$$\sum_{j=1}^{d+1} \text{arie}(F_j) \xrightarrow[d \rightarrow \infty]{\text{Loi}} \text{Loi explicite}$$

- régime des extrêmes : on peut identifier c_0, c_1, c_2, c_3 tq

$$Z_d \mathbb{P}(\text{arie}(F_{t_2}) > t_2) \xrightarrow[d \rightarrow \infty]{} e^{-c_2}.$$

4. Convergence en loi du maximum des aires de facettes

Prop: $\text{Fac}_d = \{ \text{facettes de } K_d \}$

$$\text{Fac}_d^{\neq, \pm} = \{ \text{b-explosions de facettes de } K_d \text{ 2 à 2 } \neq \} \quad d \geq 1$$

$$\text{Si } P_d = \mathbb{E} \left(\sum_{(F_1, \dots, F_d) \in \text{Fac}_d^{\neq, \pm}} \mathbb{I}_{\text{arie}(F_1) > t_1} \times \dots \times \mathbb{I}_{\text{arie}(F_d) > t_d} \right)$$
$$\xrightarrow[d \rightarrow \infty]{} e^{-d c_2} \quad \forall d \geq 1,$$

$$\text{alors } \mathbb{P} \left(\max_{F \in \text{Fac}_d} \text{arie}(F) \leq t_2 \right) \xrightarrow[d \rightarrow \infty]{} e^{-e}$$

Défin: inégalités de type Bonferroni.

$$\mathbb{P} \max_F \text{arie}(F) \leq t_2 = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_F \{ \text{arie}(F) > t_2 \} \right)$$

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_F \{ \text{arie}(F) > t_2 \} \right) \leq \sum_F \mathbb{P} \{ \text{arie}(F) > t_2 \}$$

On peut aussi minorer

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_F \{ \text{arie}(F) > t_2 \} \right) \geq \sum_F \mathbb{P} \{ \text{arie}(F) > t_2 \} - \frac{1}{2} \sum_{(F_1, F_2) \in \text{Fac}_d^{\neq, \pm}} \mathbb{P} \{ \text{arie}(F_1) > t_2 \} \{ \text{arie}(F_2) > t_2 \}$$

De manière générale,

$$S_{2l} \leq \sum_{n=1}^m \mathbb{I}_{\{\text{arr}(F) > t_1\}} \leq S_{2l+1} \quad (*)$$

où

$$S_n = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_{(F_1, \dots, F_k) \in \text{Fac}_k} \mathbb{I}_{\{\text{arr}(F_i) > t_1\}} \cdot \frac{1}{P_2}$$

On intègre (*) (et on fait $1 - \dots$).

$$\sum_{k=0}^{2l+1} \frac{(-1)^k}{k!} P_2 \leq \mathbb{P}(\max \leq t_1) \leq \sum_{k=0}^{2l} \frac{(-1)^k}{k!} P_2$$

où $P_0 = 1$.

fin de la dém.

Étudions les P_2 :

- P_1 : ok!

- On se concentre sur P_2 :

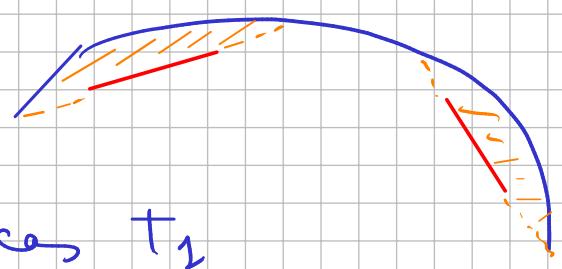
$$P_2 = \mathbb{E}\left(\sum_{F_1 \neq F_2} \mathbb{I}_{\{\text{arr}(F_1) > t_2\}} \mathbb{I}_{\{\text{arr}(F_2) > t_1\}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum \mathbb{I}_{\text{coll}(F_1) \cap \text{coll}(F_2) = \emptyset}\right)$$

$$+ \mathbb{E}\left(\sum \mathbb{I}_{F_1 \neq F_2 \text{ et pas de sommet commun}}\right)$$

$$+ \mathbb{E}\left(\sum \mathbb{I}_{\text{au moins un sommet commun}}\right)$$

$$= T_1 + T_2 + T_3$$



$$T_1 \longrightarrow C^{-\delta z}$$

$$T_2, T_3 \longrightarrow 0$$

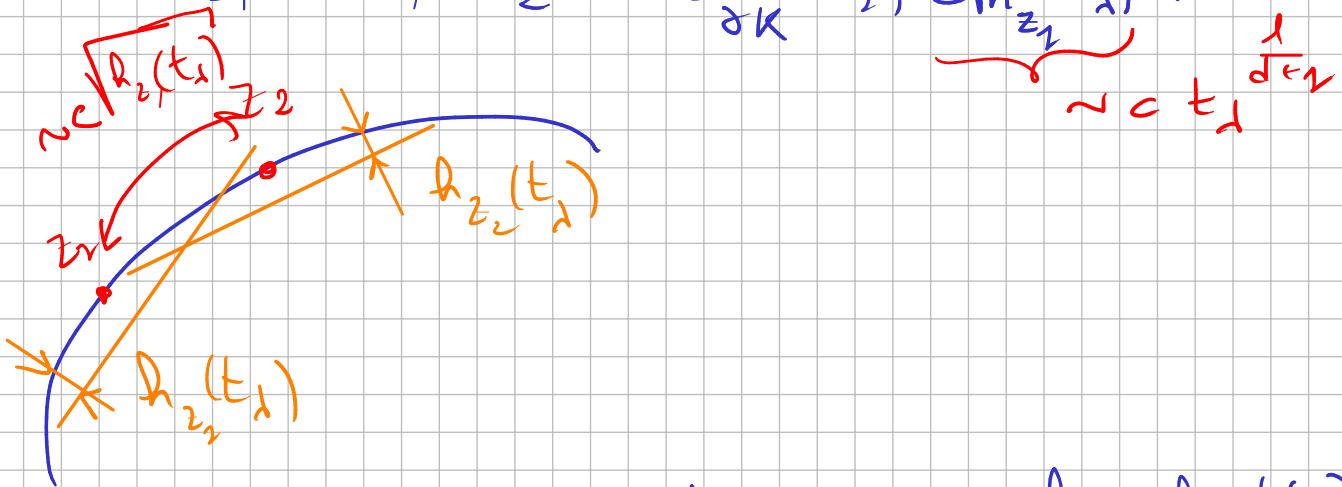
étude de T_2 : formule de Mecke

$$T_2 = \frac{\lambda^{2d}}{(2d)!} \int \cdots \int_C^{-\lambda(\text{Vol}_d(C_{\partial(t_1)} + \text{Vol}_d(C_{\partial(t_2)}))} dx_1 \cdots dx_{2d}$$

$$\approx \left(\sum_i \mathbb{P}(\text{aie}(T_i) \geq t_1) \right)^2$$

étude de T_2 :

- des qu'il y a \cap des collets, on les écarte par (z_1, h_1) et (z_2, h_2) , $z_2 \in B_{\delta K}(z_1, c\sqrt{h_{z_1}(t_1)})$



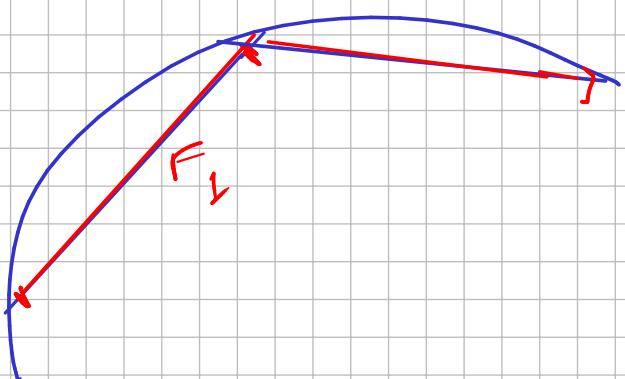
- On peut se contenter d'intégrer pour $h_1 \approx h_{z_1}(t_1)$
 $h_2 \approx h_{z_2}(t_2)$

- Sur la $\{\text{aie}(T_1) > t_1\}$, la forme de T_1 est essentiellement celle du simplexe maximal C section

$R_1 = \text{rapport entre l'aire de } T_1 \text{ et l'aire du simplexe max}$

$$\mathbb{P}(R_1 \leq 1 - \frac{1}{\log \lambda} \mid \text{aie}(T_1) > t_1) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} 0 \quad x \in]0, 1[$$

employer que si l'aire (F_2) > E_2 et l'aire (F_1) > E_1
 F_1 et F_2 occupent l'espace du simplexe maximal
à deux actions (équivalent).



$$Vol_d(Cab(6,1) \cup Cab(6,2))$$

$$> Vol_d(Cab(6,1)) + c Vol_d(Cab(6,2))$$