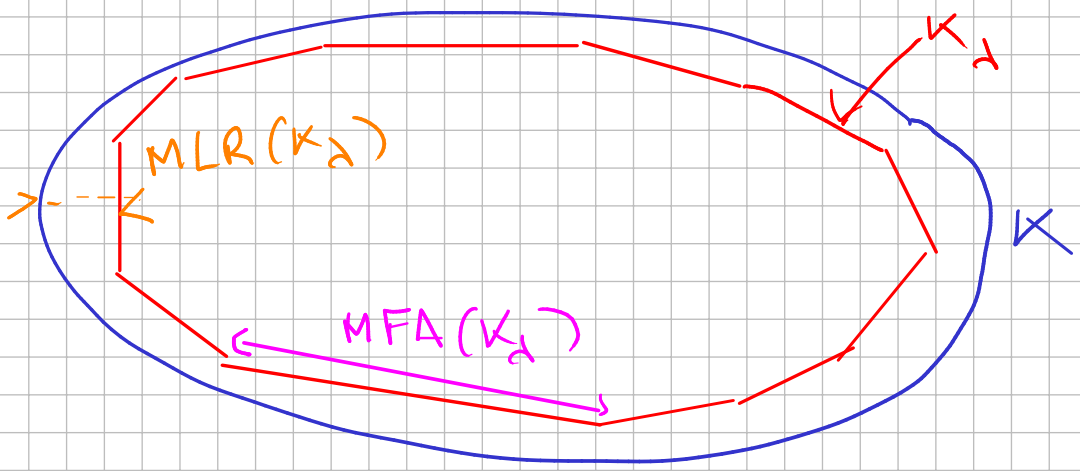
Résultats typiques et extrémaux pour des interfaces aléatoires convexes – Partie 2

GT Proba, 15/03/21

1. Modèle et résultats



K corps convexe lisse de $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{P}_\lambda$ = PPP homog (λ)

$K_\lambda = \mathrm{Conv}(\mathcal{P}_\lambda \cap K)$

$$\mathbb{P}\left(MLR(K_\lambda)\right) \leq \lambda^{-\frac{2}{d+1}}\left(a_0\left(a_1 \log\lambda + a_2 \log(\log\lambda)\right) + a_3 + \tau\right) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} e^{-e^{-\tau}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}\left(MFA(K_\lambda)\right) \leq \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}}\left(b_0\left(b_1 \log\lambda + b_2 \log(\log\lambda)\right) + b_3 + \tau\right) \longrightarrow e^{-e^{-\tau}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

On se concentre sur $MFA(K_\lambda)$

Stratégie : loi d'un maximum ?

suite $\{\xi_i, i \geq 1\}$ de v.a. i.i.d.

$$\mathbb{P}\left(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq u_n\right) \overset{?}{=}$$

n fixé
u_n bien choisi

$$= \mathbb{P}(\xi_1 \leq u_n)^n$$

$$= \left(1 - \mathbb{P}(\xi_1 > u_n)\right)^n$$

$$= \exp\left(+n \log\left(1 - \mathbb{P}(\xi_1 > u_n)\right)\right)$$

Si $n\,\mathbb{P}(\xi_1 > u_n) \longrightarrow \tau$, alors

$$\mathbb{P}(\max(\xi_1,\dots,\xi_n)\le u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nb de var.}}}{n}\ \underbrace{\mathbb{P}(\xi_1>u_n)}_{\substack{\uparrow\\ \text{queue de}\\ \text{distribution d'1 va}}} \longrightarrow \tau$$

<u>Leadbetter</u> (1974) : $(\xi_i,\ i\geq 1)$ suite stat.

① $n\,\mathbb{P}(\xi_1\geq u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tau$

② n, l donnés,

$\forall\ i_1<i_2<\dots<i_p<\dots<i_p+l<j_1<\dots<j_q<n$

$$\Big|\mathbb{P}(\max(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_p},\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_q})\le u_n)$$

$$-\mathbb{P}(\max(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_p})\le u_n)\,\mathbb{P}(\max(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_q})\le u_n)\Big|$$

$$\le \alpha_{n,l} \xrightarrow[n,l\to\infty]{} 0$$

Condition $D(u_n)$ de Leadbetter

③ n fixé

$$n\sum_{j=2}^{n}\Big|\mathbb{P}(\xi_1\geq u_n,\xi_j\geq u_n)-\mathbb{P}(\xi_1>u_n)\,\mathbb{P}(\xi_j\geq u_n)\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Condition $D'(u_n)$ de Leadbetter

① + ② + ③ $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(\max(\xi_1,\dots,\xi_n)\le u_n) \longrightarrow e^{-\tau}$

Rem : ① il faut identifier une facette particulière → facette typique

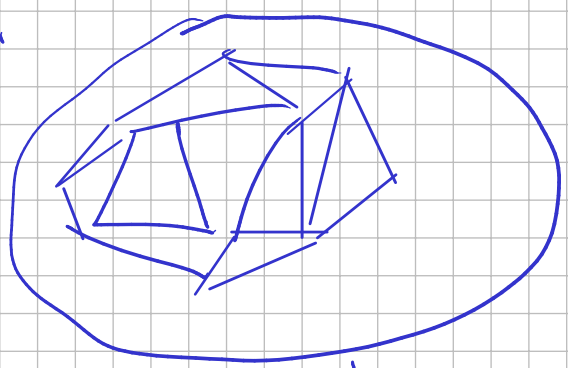
n → remplacer par le nb moyen de facettes.

Dans la suite, on va se concentrer sur la démo de ①

(② + ③ : remplacé par d'autres conditions de type indépendance asymptotique).

2. Volume de simplexes aléatoires dans la boule et facette typique

Rem :



"simu en dim 3"

polytope "simplicial"

Avec proba 1 toutes les facettes de K_λ sont des simplexes.

(car $\mathbb{P}(\exists\, (d+1)$ pts de $\mathcal{P}_\lambda$ sur 1 hyperplan$) = 0$)

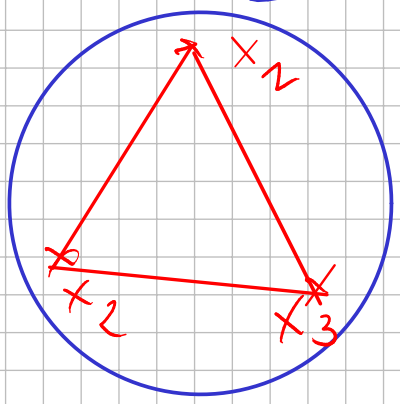
← section de K : pas de ∂K, ~ ellipsoïde.

Quitte à appliquer une transfo affine on peut supposer que c'est

à 1 boule de dim $(d-1)$

On se ramène au pb suivant :

- $\mathbb{B}^d$ boule-unité de dim d.
- $X_1, \dots, X_{d+1}$ $(d+1)$ points iid unif dans $\mathbb{B}^d$
- loi de $\mathrm{Vol}_d(\mathrm{Conv}(X_1, \dots, X_{d+1}))$?



Ce vol est $\leq v_d$

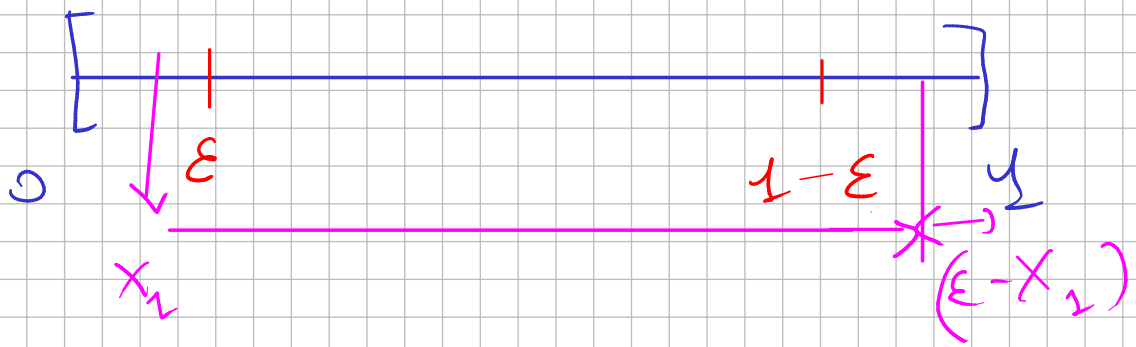
v_d = vol du simplexe régulier inscrit dans $\mathbb{B}^d$.

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Vol}_d(\mathrm{Conv}(X_1, \dots, X_{d+1})) \geq v_d(1-\varepsilon)\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} ??$$

<u>dim 1</u> :

$X_1, X_2 \sim \mathrm{Unif}([0,1])$ indép.

$\mathbb{P}(|X_1 - X_2| \geq 1-\varepsilon) \sim ?$



$$\mathbb{P}(|X_1 - X_2| > 1-\varepsilon) = 2\mathbb{E}((\varepsilon - X_1)_+)$$
$$= \varepsilon^2$$

<u>Lemme</u> :

$$\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} ? \qquad X \text{ v.a} \geq 0$$

avec $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} c\,\varepsilon^\gamma \qquad \alpha, \gamma \geq 0$

$$\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} c\,\alpha\, B(\alpha, \gamma+1)\,\varepsilon^{\alpha+\gamma}$$

<u>Dém</u> :

$$\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\varepsilon \alpha(\varepsilon - x)^{\alpha-1}\,\mathbb{P}(X \leq x)\,dx$$

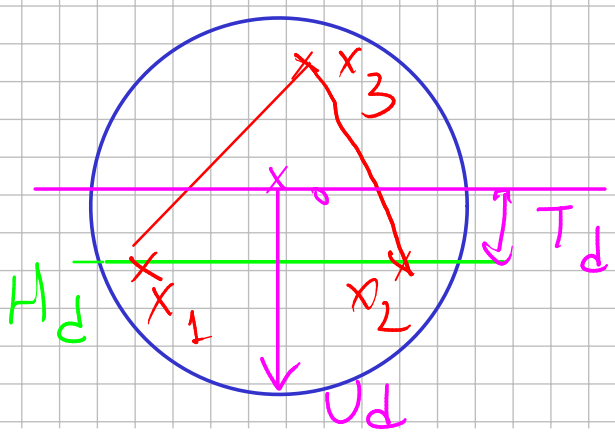
fin de la dém

<u>dim 2 et plus</u> :

pas facile de comprendre quels sont les degrés de liberté autorisés sur les points...

dim 2 : $n \leq \varepsilon^{-4}$ Pourquoi ?

méthode : récurrence sur la dim



On veut fixer $x_1, \dots, x_d$ sur un certain hyperplan et puis appliquer

$$\mathrm{Vol}_d(\mathrm{Cons}(X_1,\dots,X_{d+1})) = \frac{1}{d}\, d(X_{d+1}, H) \times \mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{Cons}(X_1,\dots,X_d))$$

<u>Prop</u> (équivalence stochastique) :

$X_1,\dots,X_d$ iid unif dans $\mathbb{B}^d$.

hyperplan H_d contenant $X_1,\dots,X_d$:

U_d := vect unitaire sortant normal à H_d

$T_d := d(0, H_d)$.

$$X_i = T_d U_d + \sqrt{1-T_d^2}\, Y_i$$

où $Y_i \in \mathbb{B}^{d-1}$

① Les v.a. $T_d, U_d, (Y_1,\dots,Y_d)$ sont indép

② $U_d \sim \mathrm{Unif}(\mathbb{S}^{d-1})$

③ T_d de densité $\propto (1-t^2)^{\frac{(d-1)(d+1)}{2}}$

④ $(Y_1,\dots,Y_d)$ de densité $\propto \mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{Cons}(y_1,\dots,y_d))$

<u>Dém</u> : formule de Blaschke-Petkantschin linéaire

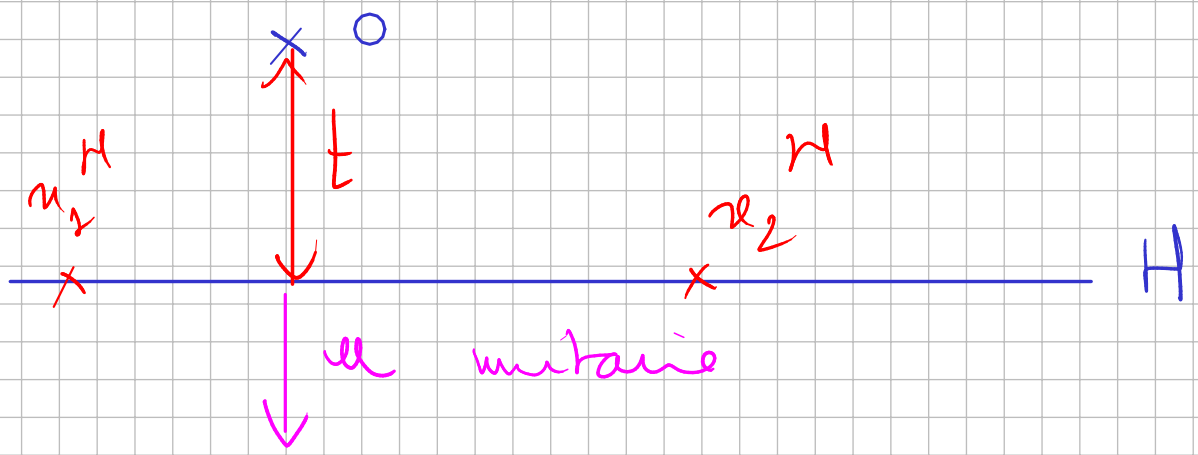
chgt de var

$$dx_1 \dots dx_d = (d-1)!\, \mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{Cons}(x_1^H,\dots,x_d^H))\, dH$$

où $x_1^H, \dots, x_d^H$ = points sur l'hyperplan H

dH = mesure sur la grassmannienne des hyperplans affines de $\mathbb{R}^d$

$$dH = dt \, d\sigma_{d-2}(u)$$



$$\mathbb{E}\left(h(X_1, \dots, X_d)\right)$$

$$= \int_{x_2^H, \dots, x_d^H \in \sqrt{1-t^2}\, B^{d-1}} h(x_1^H, \dots, x_d^H)\, (d-2)!\, \mathrm{Vol}_{d-1}\, dx_1^H \dots dx_d^H \; dt \, d\sigma_{d-1}(u)$$

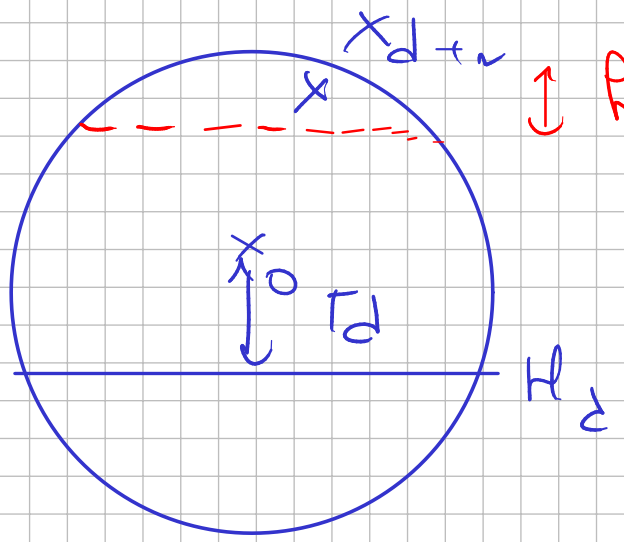
On pose $y_i = \dfrac{x_i^H}{\sqrt{1-t^2}}$ $\forall\, 1 \le i \le d$

fin de la dém.

$$\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{Cons}(X_1, \dots, X_{d+2})\right)$$

$$= \frac{1}{d}\, d(X_{d+2}, H_d)\, \mathrm{Vol}_{d-2}\left(\mathrm{Cons}(X_1, \dots, X_{d-1})\right)$$

$$= \frac{1}{d} \left| d_{U_d}(X_{d+1}, 0) + T_d \right| \left(1 - T_d^2\right)^{\frac{d-1}{2}} \mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{Gr}(Y_1))$$



↕ hauteur de la calotte

Cond à T_d et $W_d = \mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{Gr}(Y_1, \dots, Y_d))$ et U_d,

$$\mathrm{Vol}_d(\mathrm{Gr}(X_1, \dots, X_{d+1})) \geq v_d(1-\varepsilon).$$

$\iff X_{d+1} \in$ calotte sphérique de hauteur $\left(1 + T_d - \dfrac{d\, v_d (1-\varepsilon)}{(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} W_{d-1}}\right)_+$