

Résultats typiques et extrêmes pour des interfaces aléatoires convexes

GT Rota, le 08/03/21

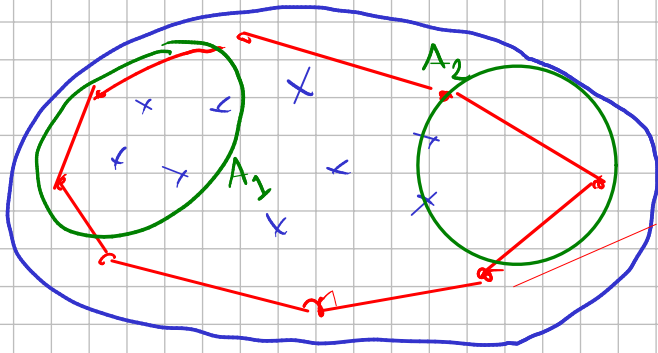
Travail commun avec J. E. Yukich.

1. Modèle et résultats

K corps convexe de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, bord de K de classe C^1
(convexe compact d'intérieur non vide)

$\{X_i : i \geq 1\}$ v.a. i.i.d. unif. dans K .

$K_n = \text{Conv}(\{X_1, \dots, X_n\})$ polyèdre aléatoire



modèle binomial

(bi du nb de pts dans $A \subset K$
= binomiale

et bi jointe du nb de pts
dans A_1 et dans A_2 si

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

bi multinomiale

En général, on s'intéresse aux asymptotiques quand $n \rightarrow \infty$.
nb de pts extrêmes, $\text{Vol}_d(K \setminus K_n) \dots$

C'est plus facile de travailler avec le modèle poissonien

$\mathcal{P}_\lambda =$ Processus Ponctuel de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$

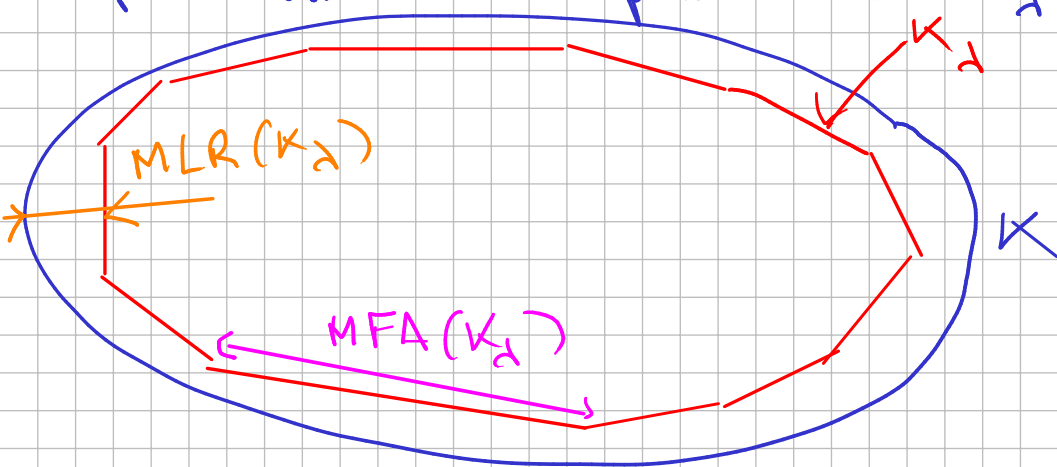
$$K_\lambda = \text{Conv}(\mathcal{P}_\lambda \cap K)$$

On gagne l'indépendance de $\#(\mathcal{P}_\lambda \cap A_1)$ et $\#(\mathcal{P}_\lambda \cap A_2)$
si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

loi de $\#(\mathcal{P}_\lambda \cap A_1)$ = loi de Poisson ($\lambda \text{Vol}_d(A_1)$)

Pu l'ellipsoïde considéré:

fluctuations de la frontière de K_1



$MLR(K_1)$ = maximal local roughness
 = distance de Hausdorff entre K et K_1
 = distance "radiale" maximale entre les deux frontières.

$MFA(K_1)$ = maximal facet area
 = aire maximale d'une facette de K_1 .
 fluctuation "longitudinale" de ∂K_1 .

Rem: on s'attend à ce que $MLR(K_1)$ soit réalisé là où la courbure de ∂K est maximale
 et que $MFA(K_1)$ soit réalisé là où la courbure de K_1 est minimale.

Résultats principaux: thm de cv des valeurs extrêmes.

$$P(MLR(K_1) \leq \lambda^{-\frac{2}{d+1}} (a_1 \log \lambda + a_2 \log(\log \lambda) + a_3 + o(1))) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} e^{-e^{-\tau}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

où

$$\frac{MLR(K_1)^{\frac{d+1}{2}}}{a_1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} (a_1 \log \lambda + a_2 \log(\log \lambda) + a_3) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \text{Gumbel}$$

($K = B^d$)

$$\mathbb{P}(MFA(K_\lambda) \leq \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}} (b_0(b_1 \log \lambda + b_2 \log(\log \lambda) + b_3 + \varepsilon))) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

C'est $\frac{1}{b_0} MFA(K_\lambda)^{\frac{d-1}{d+1}} - (b_1 \log \lambda + b_2 \log(\log \lambda) + b_3) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\text{Gumbel}}$

(K q.c.g., quelques hypothèses...)

Rem: sur les constantes

$a_0, \dots, a_3, b_0, b_1, b_2$: explicites et ne dépendent que de d
 b_3 : dépend de ∂K (en fait du comportement local de la courbure en les points qui réalisent le minimum)

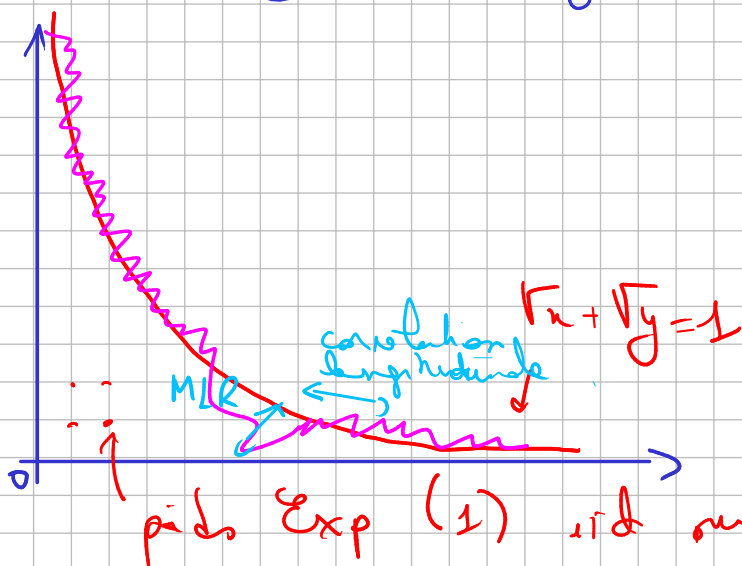
Rem 2: le comportement des fluctuations suit celui de modèles de type "baby KPZ universality class"

$d=2$: $MLR(\underbrace{\lambda K_\lambda}_{\text{homothétique par } \lambda \text{ de } D_2}) \sim \lambda^{1/3} (a_0 a_1 \log \lambda)^{2/3}$

MFL (λK_λ) $\sim \lambda^{2/3} (a_0 a_1 \log \lambda)^{1/3}$
 maximal path length

Ces 2 fluctuations se retrouvent dans de nombreux modèles d'interfaces aléatoires.

exemples: ① corner growth model



w_x : poids en $x \in \mathbb{Z}^2$
 $G(u, v) = \max_{\gamma: u \rightarrow v} \sum_{x \in \gamma} w_x$

max sur tous les chemins qui mènent de u à v , $u, v \in \mathbb{Z}^2$, avec des pas $\rightarrow \uparrow$.

pds Exp (1) iid sur tous les points de $\mathbb{Z}^2$

cluster $t^{-1} \{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : G(0, (m, n)) \leq t \}$

→ zone sous le cercle $(\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1)$

fluctuation radiale $\sim \lambda^{1/3} (\log \lambda)^{2/3}$

corrélation longitudinale $\sim \lambda^{2/3} (\log \lambda)^{1/3}$

modèle du corner growth model couplé avec le
totally asymmetric simple exclusion process, via une
fonction de hauteur qui satisfait l'équation de Burgers.

G_λ , le gradient d'une solution de l'équation de
Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) satisfait l'eq de Burgers.

KPZ: EDP stochastique

$$\partial_t h = -\lambda (\partial_x h)^2 + \nu \partial_x^2 h + \sigma \dot{W}$$

Brenti Flanc

Armin, Corwin, Quastel 2011

② Random cluster model

$\mathbb{Z}^2$, on ouvre ou on ferme une arête avec proba $p/(1-p)$

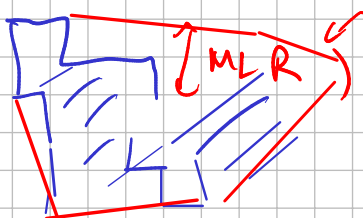
Pour chaque configuration, on rajoute une proba
d'apparition proportionnelle à $\frac{\# \text{Comp conn}}{\# \text{Comp tot}}$

$$\mu(w) = \frac{1}{Z} \sum_{\text{configuration}} \prod_{e \in \text{edges}} w(e) (1-p)^{1-w(e)}$$

prob de la configuration w

(sur un ss-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$).

Droplet: 1 comp. conn. contenant une aire $> A$
 $d = \sqrt{A}$



corr. corr. du droplet

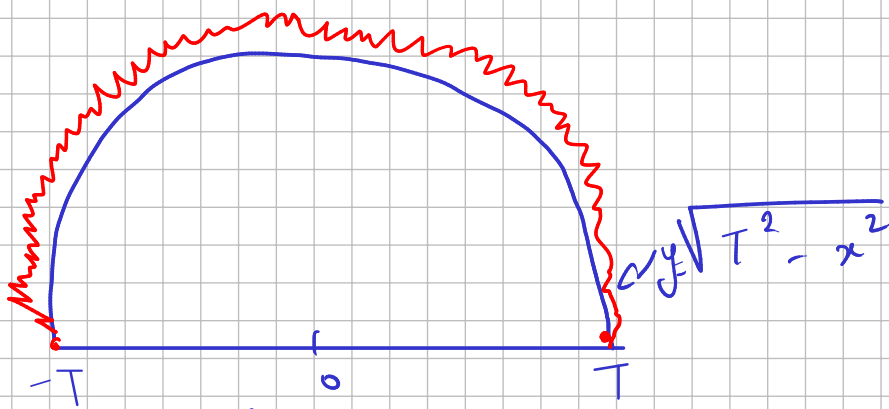
$$MLR \sim \lambda^{1/3} (\log \lambda)^{2/3}$$

$$\text{corr. long.} \sim \lambda^{2/3} (\log \lambda)^{1/3}$$

Réf: Alexander 2001

③ Pont brownien contraint à rester à l'extérieur d'une barrière circulaire.

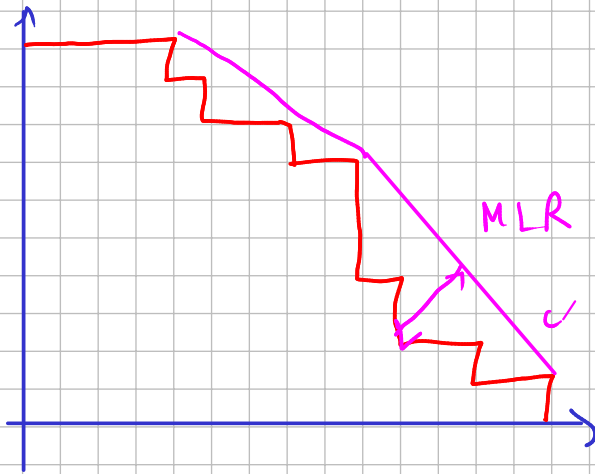
W_t = pont brownien "attaché" aux points $(-T, 0)$ et $(T, 0)$ et à l'extérieur du $\frac{1}{2}$ -cercle.



on fluctuations quand $T \rightarrow \infty$.

Ref: Ferrari - Spohn 2005, et en processus avec limite explicite exprimée en termes de fonctions d'Airy.

④ Marche au hasard orientée contrainte par l'axe MAH qui donne



sur l'axe des $y, y \geq 0$ et finissent sur l'axe des $x, x \geq 0$, arc des pas $\rightarrow \downarrow$

ent. conv.

$$\mu_d(\gamma) = \frac{1}{Z} \sum_{0 < d < \frac{1}{2}} L(\gamma)$$

$L(\gamma)$ = longueur de la suite
 $\mu_d(\gamma) = \frac{1}{Z} \sum_{A(\gamma) \geq N^2} \dots$ mesure conditionnée

Sur cette mesure,

$$MLR(\gamma) \stackrel{P}{=} \Theta \left(d^{1/3} (\log d)^{2/5} \right)$$

$$MPL(\gamma) \stackrel{P}{=} \Theta \left(d^{2/3} (\log d)^{1/5} \right)$$

corrélation
longitudinale

Ref: Hammond 2011 "Baby KPZ".