M1 MA 2021–2022, ALGÈBRE
EXAMEN DU MERCREDI 12 JANVIER 2022, 9H30-11H30
MADRILLET, SALLE M7

PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Notations et rappels.

Les quatre exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée.

On définit le **centre** de l'anneau A par

$$Z(A) := \{x \in A \,|\, (\forall y \in A)\, xy = yx\}.$$

C'est un sous–anneau de A, et même, lorsque A est unitaire, un sous–anneau unitaire de A.

On note ϕ la fonction indicatrice d'Euler. On rappelle que, si $n = p_1^{a_1}...p_m^{a_m}$ avec les p_i premiers deux à deux distincts et les $a_i \geq 1$, alors

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i-1}(p_i - 1)\ ;$$

en particulier, chaque $p_i - 1$ divise $\phi(n)$.

Exercice I

Soient $A = \dfrac{\mathbf{Z}}{84\mathbf{Z}}$ et $B = \dfrac{\mathbf{Z}}{21\mathbf{Z}}$.

(1) Déterminer les morphismes d'anneaux de A dans B
(si f est un morphisme de A dans B, on pourra chercher les possibilités pour $f(\bar{1})$ ($\bar{1}$=élément neutre de A)).

(2) Déduire de (1) qu'il existe un unique morphisme d'anneaux unitaires $\psi : A \to B$, et le déterminer.

Exercice II

Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{n \geq 1 \,|\, \phi(n) = 78\}.$$

Exercice III

Soit A un anneau, *a priori* ni commutatif ni unitaire. On suppose que

$$(\forall x \in A),\ x^3 = -x.$$

(1) Etablir que, pour tout $x \in A$, si $x^2 = 0_A$ alors $x = 0_A$.

(2) Montrer que, pour chaque $x \in A$, $x^2 = -x^2$.

(3) Soient $x \in A$ et $y \in A$.
En considrant $(y^2x + y^2xy^2)^2$ et $(xy^2 + y^2xy^2)^2$,
montrer que $y^2x + y^2xy^2 = xy^2 + y^2xy^2 = 0_A$.
(4) En déduire que, pour chaque $y \in A$, $y^2 \in Z(A)$.
(5) Montrer que

$$\forall (x, y) \in A^2, \ -xy = x(yx)^2y.$$

(6) En déduire que A est commutatif.

Exercice IV

On considère l'anneau $A := \mathcal{M}_2(\frac{\mathbf{Z}}{19\mathbf{Z}})$ des matrices 2×2 à coefficients dans le corps $\frac{\mathbf{Z}}{19\mathbf{Z}}$.

(1) Exhiber un sous–anneau unitaire non–intègre B de A de cardinal 361 (on pourra chercher les éléments de B parmi les matrices diagonales).
(2) Exhiber un sous–anneau C de A de cardinal 361 qui soit un corps (on pourra chercher un analogue des matrices de similitude sur $\frac{\mathbf{Z}}{19\mathbf{Z}}$).