groupe fini simple non abélien X et un certain entier $m \geqslant 1$; on a donc

$$1/12 = d(G) \leqslant d(G_j/G_{j+1}) = d(X)^m \leqslant (1/12)^m.$$

On a donc $m = 1$ et $d(X) = 1/12$, d'où

$$X \approx A_5 \quad \text{et} \quad X^m \approx A_5 ;$$

posons $N = G_j$ et $M = G_{j+1}$. On a bien N char G, M char G et $N/M \approx A_5$. Appliquons le lemme 1 ; on obtient

$$\begin{aligned} 1/12 = d(G) &\leqslant d(G/N)d(N) \\ &\leqslant d(G/N)d(N/M)d(M) \\ &\leqslant d(N/M) = d(A_5) = 1/12. \end{aligned}$$

On a donc $d(G/N) = 1$ et $d(M) = 1$, donc G/N et M sont abéliens. De plus on a

$$d(N) = d(N/M)d(M) ;$$

donc, d'après la remarque suivant l'énoncé du lemme 1, on a $M \subset Z(N)$. D'où le résultat.

B) LE CAS DES GROUPES NILPOTENTS.

Rappelons le résultat suivant, qui constitue le théorème 3 de [4] :

Théorème 4. – *Soit G un $H_{1/2}$-groupe ; alors G est nilpotent.*

D'après la remarque finale de [4], ce résultat est optimal, car S_3 n'est pas nilpotent et $d(S_3) = 1/2$; en fait cet exemple est typique, comme nous allons le démontrer.

Théorème 5. – *Soit G un groupe fini non nilpotent tel que $d(G) = 1/2$; alors on a*

(i) $G/Z(G) \approx S_3$;

(ii) *Si Z(G) est d'ordre impair, alors G contient un sous-groupe A isomorphe à S_3 tel que*

$$G = A \times Z(G).$$

Remarque : L'énoncé (ii) devient inexact si l'on supprime l'hypothèse concernant Z(G) ; en effet, considérons le groupe suivant :

$$G = \{x, y \mid x^6 = 1, y^2 = x^3, yxy^{-1} = x^{-1}\}.$$

On vérifie aisément que G est d'ordre 12, que $Z(G) = \langle y^2 \rangle$ est d'ordre 2, que $G/Z(G) \approx S_3$ (donc que G n'est pas nilpotent), et que $d(G) = 1/2$; mais $y^2 \in Z(G)$ et y n'est pas le carré d'un élément de Z(G), donc Z(G) n'est pas facteur direct de G.

Démonstration : (i) Posons $H = G/Z(G)$; d'après le lemme 1, on a

$$d(G) \leqslant d(Z(G))d(H) = d(H),$$

soit

$$d(H) \geqslant 1/2.$$

Si $d(H) > 1/2$, H est nilpotent d'après le théorème 4, donc G est nilpotent : absurde ! Donc $d(H) = 1/2$; le lemme 1 implique alors que

$$(\forall \sigma \in G) \quad \begin{aligned} C_H(\sigma Z(G)) &= C_G(\sigma)Z(G)/Z(G) \\ &= C_G(\sigma)/Z(G) \end{aligned}$$

Supposons $\sigma Z(G) \in Z(H)$; alors

$$H = C_G(\sigma)/Z(G),$$

soit $G = C_G(\sigma)$. On a donc $\sigma \in Z(G)$. Donc $Z(H) = \{1\}$, ce qui montre que, si $|H| < 10$, $H \approx S_3$; nous supposerons donc dorénavant que $|H| \geqslant 10$, et en déduirons une contradiction.

Posons $n = |H|$, $m = |\{h \in H \mid |C_H(h)| = n/2\}|$ et $H_0 = \{h \in H \mid |H : C_H(h)| \geqslant 3\}$; on a

$$\begin{aligned} n^2/2 = |H|^2 d(H) &= \sum_{h \in H} |C_H(h)| \\ &= n + m(n/2) + \sum_{h \in H_0} |C_H(h)| \\ &\leqslant n + m(n/2) + (n-m-1)(n/3) \\ &= (n^2/3) + (mn/6) + (2n/3). \end{aligned}$$

Cela s'écrit $(n/6)(m+4) \geqslant n^2/6$, soit

$$m \geqslant n - 4.$$

On peut donc trouver $n - 4$ éléments de H, $h_1, \ldots, h_{n-4}$, tels que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-4\}, \quad |C_H(h_i)| = n/2.$$

Soit $T = \bigcap_{i=1}^{n-4} C_H(h_i)$; on a

$$C_H(T) \supset \{h_1, \ldots, h_{n-4}\},$$

d'où

$$|C_H(T)| \geqslant n - 4 \geqslant (n/2) + 1,$$

d'où $C_H(T) = H$. On a donc $T \subset Z(H)$, d'où $T = \{1\}$. Or $C_H(h_1) \neq \{1\}$; soit j le plus petit entier tel que

$$\bigcap_{i=1}^{j} C_H(h_i) = \{1\},$$

et soit

$$A = \bigcap_{i=1}^{j-1} C_H(h_i) ;$$

on a

(*) $A \lhd H$ (car chaque $C_H(h_i)$ est d'indice 2 dans H, donc y est distingué) ;

(**) $A \neq \{1\}$;

(***) $A \cap C_H(h_j) = \{1\}$.

La condition (***) donne

$$|A||C_H(h_j)| \leqslant |H|,$$

d'où $|A| \leqslant 2$. Donc $|A| = 2$ d'après (**) ; mais (*) implique alors que $A \subset Z(H)$: absurde ! D'où le résultat.

(ii) D'après le même raisonnement que lors de la preuve du théorème 3 de [4], $|G'| = 3$; posons

donc $G' = \langle \sigma \rangle$, et soit τ une involution de G. Z(G) étant d'ordre impair, $\tau \notin Z(G)$. Il est clair (car G n'est pas nilpotent) que

$$G' \cap Z(G) = \{1\} ;$$

$\tau Z(G)$ étant d'ordre 2 dans G/Z(G),

$$\tau \notin Z(G) \cup Z(G)\sigma \cup Z(G)\sigma^2 = C_G(\sigma) ;$$

donc (car $\langle \sigma \rangle \lhd G$),

$$\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}.$$

On voit donc que $\langle \sigma, \tau \rangle$ est isomorphe à S_3, que $\langle \sigma, \tau \rangle$ engendre G modulo Z(G) et que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cap Z(G) = \{1\}.$$

Donc

$$G = \langle \sigma, \tau \rangle Z(G) = \langle \sigma, \tau \rangle \times Z(G).$$

D'où le résultat.

Remarque : Il est clair que la démonstration, et donc le résultat, restent valables si l'on remplace l'hypothèse « G est d'ordre impair » par l'hypothèse plus faible suivante : Z(G) ne contient pas toutes les involutions de G.

C) LE CAS DES GROUPES ABÉLIENS.

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme classique suivant :

Lemme 2. – *Soit G un groupe tel que G/Z(G) soit cyclique ; alors G est abélien (et donc G/Z(G) = {1}).*

Démonstration : Supposons que G/Z(G) soit engendré par un élément $xZ(G)$; alors

$$G = \langle x \rangle Z(G).$$

Soit y_1 et y_2 deux éléments de G ; on peut alors écrire :

$$y_1 = x^{m_1}z_1 \quad \text{et} \quad y_2 = x^{m_2}z_2$$

avec $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $(z_1, z_2) \in Z(G)^2$; on a donc

$$\begin{aligned} y_1y_2 &= (x^{m_1}z_1)(x^{m_2}z_2) = x^{m_1}(z_1x^{m_2})z_2 \\ &= x^{m_1}(x^{m_2}z_1)z_2 = x^{m_1+m_2}z_1z_2, \end{aligned}$$

car $z_1 \in Z(G)$. De même

$$y_2y_1 = x^{m_2+m_1}z_2z_1 ;$$

Z(G) étant abélien, on a $y_1y_2 = y_2y_1$; ceci vaut pour tout $(y_1, y_2) \in G \times G$, donc G est abélien. D'où le résultat.

Théorème 6. – *Soit G un $H_{5/8}$-groupe ; alors G est abélien.*

Démonstration : Il s'agit du théorème 2 de [4], qui y était prouvé au moyen de la théorie des caractères. On peut aussi en donner une démonstration élémentaire, comme suit : soit G un groupe fini non abélien ; on a

$$\begin{aligned} |G|^2 d(G) &= \sum_{x \in G} |C_G(x)| \\ &= \sum_{x \in Z(G)} |C_G(x)| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |C_G(x)| \\ &\leqslant |G||Z(G)| + (|G|/2)(|G| - |Z(G)|) \\ &= (|G|/2)(|G| + |Z(G)|). \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2, $|G/Z(G)| \geqslant 4$, d'où

$$|G|^2 d(G) \leqslant (|G|/2)(|G| + (|G|/4)) = (5/8)|G|^2,$$

soit

$$d(G) \leqslant 5/8.$$

D'où le résultat.

Théorème 7. – *Soit G un groupe fini tel que $d(G) = 5/8$; alors G est de la forme $P \times A$, où A est un groupe abélien d'ordre impair et P un 2-groupe tel que $|P'| = 2$ et $P/Z(P) \approx (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.*

Démonstration : Il résulte de la démonstration du théorème 3 de [4] que $|G'| = 2$ et $G' \subset Z(G)$; donc G est nilpotent, et on peut écrire $G = P \times A$, où P est un 2-groupe et A un groupe d'ordre impair. On a alors $G' = P' \times A'$; or $|G'| = 2$ donc A est abélien et $|P'| = 2$. Il reste à prouver que $P/Z(P) \approx (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. D'après la démonstration du théorème 6, on a

$$\begin{aligned} (5/8)|P|^2 = |P|^2 d(P) &\leqslant (|P|/2)(|P| + |Z(P)|) \\ &\leqslant (5/8)|P|^2. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité $|Z(P)| = |P|/4$, d'où, d'après le lemme 2

$$P/Z(P) \approx (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

D'où le résultat.

Je tiens à remercier Jean-Louis Nicolas pour m'avoir soumis le problème dont est issu cet article, André Warusfel pour m'avoir encouragé à poursuivre mes recherches à son sujet, et John D. Dixon pour m'avoir indiqué le rôle du théorème 2 dans la preuve du théorème 1.

Bibliographie

[1] P. X. GALLAGHER, *The number of conjugacy classes in a finite group*, Mathematische Zeitschrift 118 (1970), p. 175-179.

[2] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, New York, Chelsea, 1980.

[3] I. M. ISAACS, *Character theory of finite groups*, New York, Academic Press, 1976.

[4] P. LESCOT, *Sur certains groupes finis*, R.M.S., avril 1987, p. 276-277.

[5] G. A. MILLER, H. F. BLICHFELDT, L. E. DICKSON, *Theory and applications of finite groups*, New York, Wiley and Sons, 1916.

Degré de commutativité et structure d'un groupe fini

par Paul Lescot

Le but de cet article est l'étude des relations entre la structure d'un groupe fini G et son degré de commutativité $d(G)$, lequel est défini par

$$d(G) = |\{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}|/|G|^2.$$

Cette étude a déjà été entamée dans [4], dont nous reprenons ici, sauf avis contraire, la terminologie et les notations ; on a donc

$$d(G) = k(G)/|G| = m(G)/|G|^2.$$

Soit $\mathscr{C}$ une classe de groupes finis ; nous allons chercher à établir des résultats du type suivant (rappelons que pour tout $\lambda \in]0, 1]$, G est par définition un H_λ-groupe si, et seulement si, $d(G) > \lambda$) :

Si G est un H_{λ_0}-groupe, alors $G \in \mathscr{C}$, et λ_0 est minimal parmi les réels possédant cette propriété.

Une fois un tel résultat établi, nous nous intéresserons à la famille des G tels que $d(G) = \lambda_0$ et $G \notin \mathscr{C}$, et nous tenterons d'en donner une description aussi complète que possible.

Les paragraphes A, B et C sont consacrés à l'étude de ce problème, dans les cas où $\mathscr{C}$ est respectivement la classe des groupes finis résolubles, la classe des groupes finis nilpotents et la classe des groupes finis abéliens.

Pour tout groupe fini G et tout élément x de G, $C_G(x)$ désignera le centralisateur de x dans G (noté N_x dans [4]).

A) Le cas des groupes résolubles.

Le résultat fondamental est le théorème suivant, qui améliore le théorème 4 de [4] :

Théorème 1. — *Soit G un $H_{1/12}$-groupe ; alors G est résoluble.*

Sa démonstration repose sur les deux faits suivants :

Lemme 1 (Gallagher ([1])). — *Soit G un groupe fini, et N un sous-groupe distingué de G ; alors $d(G) \leqslant d(N)\,d(G/N)$, et on a l'égalité si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite :*

(*) $(\forall\sigma \in G)\quad C_{G/N}(\sigma N) = C_G(\sigma)N/N.$

Remarque : La condition (*) implique en particulier que, si N est abélien, alors $N \subset Z(G)$; il suffit en effet de l'appliquer à un élément quelconque σ de N.

Démonstration : On a, pour tout $\sigma \in G$,

$$C_G(\sigma)N/N \subset C_{G/N}(\sigma N).$$

On a donc

$$C_G(\sigma)/C_N(\sigma) = C_G(\sigma)/C_G(\sigma) \cap N$$
$$\approx C_G(\sigma)N/N \subset C_{G/N}(\sigma N),$$

d'où

$$(\forall\sigma \in G)\qquad |C_G(\sigma)/C_N(\sigma)| \leqslant |C_{G/N}(\sigma N)|.$$

On a donc

$$|G|^2 d(G) = \sum_{\sigma\in G} |C_G(\sigma)| \leqslant \sum_{\sigma\in G} |C_N(\sigma)|\,|C_{G/N}(\sigma N)|$$
$$= \sum_{S\in G/N} |C_{G/N}(S)| \sum_{\sigma\in S} |C_N(\sigma)|$$
$$= \sum_{S\in G/N} |C_{G/N}(S)| \sum_{\sigma\in S} |\{n \in N \mid n\sigma = \sigma n\}|$$
$$= \sum_{S\in G/N} |C_{G/N}(S)| \sum_{n\in N} |S \cap C_G(n)|.$$

Or supposons $S \cap C_G(n) \neq \varnothing$, et soit $t \in S \cap C_G(n)$; alors $S \cap C_G(n)$ est constitué des tm, pour $m \in N$, qui commutent avec n, c'est-à-dire tels que

$$tmn = ntm,$$

soit (car $t \in C_G(n)$) $tmn = tnm$, soit $mn = nm$, d'où

$$S \cap C_G(n) = tC_N(n).$$

$S \cap C_G(n)$ est donc soit vide, soit une classe à gauche selon $C_N(n)$; on a donc

$$|S \cap C_G(n)| \leqslant |C_N(n)|.$$

Le calcul ci-dessus donne alors

$$|G|^2 d(G) \leqslant \sum_{S\in G/N} |C_{G/N}(S)| \sum_{n\in N} |S \cap C_G(n)|$$
$$\leqslant \sum_{S\in G/N} |C_{G/N}(S)| \sum_{n\in N} |C_N(n)|$$
$$= \Big(\sum_{S\in G/N} |C_{G/N}(S)|\Big)\Big(\sum_{n\in N} |C_N(n)|\Big)$$
$$= |G/N|^2\, d(G/N).|N|^2\, d(N)$$
$$= |G|^2\, d(G/N)\, d(N).$$

On en déduit l'inégalité $d(G) \leqslant d(G/N)\,d(N)$, et il est clair qu'on a l'égalité si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $(\forall\sigma \in G)\quad |C_G(\sigma)|/|C_N(\sigma)| = |C_{G/N}(\sigma N)|$

(ii) $(\forall S \in G/N)\quad (\forall n \in N)\quad S \cap C_G(n) \neq \varnothing.$

D'après le raisonnement fait plus haut, la condition (i) équivaut à

(i') $(\forall\sigma \in G)\quad C_G(\sigma)N/N = C_{G/N}(\sigma N),$

c'est-à-dire à la condition (*). Pour établir le résultat, il suffit donc de montrer que la condition (i') implique la condition (ii).

Supposons donc (i') et soit $S = uN \in G/N$ et $n \in N$; en appliquant (i') à $\sigma = n$, on obtient

$$G = C_G(n)N, \qquad \text{d'où} \qquad u \in C_G(n)N\,;$$

il existe donc $c \in C_G(n)$ et $m \in N$ tels que $u = cm$; on a donc

$$c = um^{-1} \in uN \cap C_G(n) = S \cap C_G(n),$$

d'où

$$S \cap C_G(n) \neq \varnothing,$$

soit (ii). D'où le résultat.

Théorème 2 (Blichfeldt). — *Soit G un groupe fini simple non abélien possédant un caractère irréductible $\chi \neq 1$ tel que $\chi(1) \leqslant 3$; alors G est isomorphe à A_5, $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ ou A_6.*

Démonstration : Il s'agit d'un corollaire immédiat du théorème des pages 250 et 251 de [5].

Remarque : Dans une situation plus générale, un théorème de Jordan (*cf.* [3], p. 249, théorème 14.12) affirme l'existence d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, si G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$, il existe un sous-groupe abélien distingué A de G tel que

$$|G : A| \leqslant f(n)\,;$$

le théorème 2 correspond au cas $n = 3$.

Démonstration du théorème 1 : Il suffit évidemment de démontrer que si G est un groupe fini non résoluble, alors $d(G) \leqslant 1/12$; soit donc

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_n = \{1\}$$

une suite de Jordan-Hölder de G. D'après le lemme 1 et un raisonnement par récurrence évident, on a

$$d(G) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} d(G_i/G_{i+1}).$$

G n'étant pas résoluble, il existe un indice j tel que G_j/G_{j+1} soit non-abélien ; on a alors

$$d(G) \leqslant d(G_j/G_{j+1}).$$

Il suffit donc de démontrer le résultat dans le cas où G est simple et non-abélien, ce que nous supposerons désormais. D'après le raisonnement fait au cours de la démonstration du lemme 2 de [4], on a

$$|G|\,d(G) = \sum_{i\geqslant 1} \alpha_i$$
$$|G| = \sum_{i\geqslant 1} i^2\alpha_i$$

où, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, α_i désigne le nombre de caractères irréductibles de degré i de G. Supposons $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$; on a alors (car $\alpha_1 = |G/G'| = 1$, G étant simple et non-abélien) :

$$|G| - 1 = \sum_{i\geqslant 2} i^2\alpha_i = \sum_{i\geqslant 4} i^2\alpha_i$$
$$\geqslant 16 \sum_{i\geqslant 4} \alpha_i = 16(|G|\,d(G) - 1),$$

d'où

$$d(G) \leqslant (1/16) + (15/16|G|).$$

Or G est simple et non-abélien, donc $|G| \geqslant 60$, d'où

$$d(G) \leqslant (1/16) + (15/960) = 5/64 < 1/12.$$

On peut donc supposer que $\alpha_2 \neq 0$ ou $\alpha_3 \neq 0$; il résulte alors du théorème 2 que G est isomorphe à A_5, $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ ou A_6 ; or on a

$$d(A_5) = 1/12$$
$$d(PSL_2(\mathbb{F}_7)) = 6/168 = 1/28 < 1/12$$
$$d(A_6) = 7/360 < 1/12.$$

D'où le résultat.

Remarque 1 : La démonstration que nous venons de donner prouve que A_5 est l'unique groupe fini simple non-abélien de degré de commutativité 1/12.

Remarque 2 : Avec les notations du théorème ci-dessus, on peut montrer que, pour tout groupe simple fini non-abélien, $\alpha_2 = 0$: cf. [3], problème 3.3, p. 44.

Il est clair que, pour tout groupe fini abélien C, $A_5 \times C$ est non résoluble et que

$$d(A_5 \times C) = 1/12\,;$$

réciproquement, le théorème suivant donne une condition nécessaire sur un groupe non résoluble G pour que $d(G) = 1/12$:

Théorème 3. — *Soit G un groupe fini non résoluble tel que $d(G) = 1/12$; alors G possède deux sous-groupes caractéristiques M et N tels que*

(i) $M \subset Z(N)$

(ii) $N/M \approx A_5$

(iii) G/N est abélien.

Démonstration : Soit

$$\{1\} = G_n \text{ char } G_{n-1} \ldots \text{ char } G_0 = G$$

une suite caractéristique de G, c'est-à-dire une suite de sous-groupes caractéristiques de G tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les seuls sous-groupes caractéristiques H de G tels que $G_i \subset H \subset G_{i-1}$ soient G_i et G_{i-1}. On a, d'après le lemme 1,

$$d(G) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} d(G_i/G_{i+1}).$$

G étant non résoluble, il existe un indice $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que G_j/G_{j+1} soit non résoluble ; G_j/G_{j+1}, étant caractéristiquement simple, est alors isomorphe à X^m pour un certain