Lemme 2. — *Soit G un H_λ-groupe, $\lambda > \frac{1}{4}$. On a*

$$|G'| < \frac{3}{4\lambda - 1}.$$

Démonstration : Soit α_i le nombre de représentations irréductibles de G de degré i. On a (par I) :

$$\sum_{i\geq 1} \alpha_i = k(G)$$

$$\sum_{i\geq 1} i^2\alpha_i = |G|,$$

d'où

$$|G| - \alpha_1 = \sum_{i\geq 2} i^2\alpha_i \geq 4 \sum_{i\geq 2} \alpha_i = 4(k(G) - \alpha_1),$$

$$\alpha_1 \geq \frac{1}{3}(4k(G) - |G|) > \frac{4\lambda - 1}{3}|G|.$$

Or $\alpha_1 = |G/G'|$, d'où $|G'| < \dfrac{3}{4\lambda - 1}$ et le résultat.

Théorème 2 (Dixon). — *Tout $H_{5/8}$-groupe est abélien.*

En prenant $\lambda = 5/8$ dans le lemme 2, on obtient

$$|G'| < 2, \qquad \text{d'où} \qquad G' = \{1\}.$$

Donc G est abélien.

Théorème 3. — *Tout $H_{1/2}$-groupe est nilpotent.*

En effet $\lambda = \frac{1}{2}$ donne $|G'| < 3$. Si $|G'| = 1$, G est abélien, donc nilpotent.

Si $|G'| = 2$, $G' = \{1, \alpha\}$. Or G' est distingué dans G donc

$$\alpha \in Z(G) \qquad \text{d'où} \qquad G' \subset Z(G).$$

Alors $G/Z(G)$ est abélien, et

$$Z_2(G) = G.$$

G est nilpotent.

Théorème 4. — *Tout $H_{21/80}$-groupe est résoluble.*

En effet $\lambda = 21/80$ donne $|G'| < 60$. Donc G' est résoluble donc G l'est (car tout groupe d'ordre < 60 est résoluble).

Remarques : Dans le théorème 2, 5/8 est optimal. En effet, chacun des deux groupes non abéliens d'ordre 8 vérifie

$$k(G) = \frac{5}{8}|G|.$$

Dans le théorème 3, 1/2 est optimal. En effet S_3 est non nilpotent et

$$k(S_3) = \frac{1}{2}|S_3|.$$

École polytechnique

Option M'
Première épreuve

6443. **Étude des solutions maximales de l'équation différentielle**

$$xy'' + 2y' + \frac{x}{y} = 0.$$

(Voir l'énoncé complet dans la Revue n° 1, page 43.)

I

1° Soit φ une solution définie sur $I \subset \mathbb{R}_+^*$. Posons $\psi(x) = \varphi(-x)$ pour tout x de $-I$. On a $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$, $\psi''(x) = \varphi''(-x)$ et

$$\forall x \in -I, \qquad (-x)\varphi''(-x) + 2\varphi'(-x) - \frac{x}{\varphi(-x)} = 0,$$

d'où

$$\forall x \in -I, \qquad x\psi''(x) + 2\psi'(x) + \frac{x}{\psi(x)} = 0.$$

Autrement dit, ψ est solution sur $-I$. Les graphes de φ et ψ sont symétriques par rapport à Oy.

Sur certains groupes finis

par Paul LESCOT

D'après un théorème de J. J. Dixon, tout groupe fini G tel que

$$|\{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}| > \frac{5}{8}|G|^2$$

est abélien. Le but de cette note est de démontrer des résultats analogues où « abélien » sera remplacé par « nilpotent » ou résoluble.

I. – DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS.

Dans tout cet article, G désignera un groupe fini, $|G|$ son ordre, $k(G)$ son nombre de classes de conjugaison et

$$m(G) = |\{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}|.$$

G′ (groupe « dérivé ») de G désignera le sous-groupe de G engendré par les

$$sts^{-1}t^{-1}, \quad (s, t) \in G \times G;$$

G′ est distingué dans G, et G/G′ est abélien.

On définit

$$Z_0(G) = \{1\}, \quad Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G)/Z_n(G)).$$

Un groupe G tel qu'il existe n tel que $G^{(n)} = \{1\}$ est dit résoluble.

On définit $Z_i(G)$ par

$$Z_0(G) = \{1\}, \ Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G)/Z_n(G)).$$

Un groupe G tel qu'il existe n tel que

$$Z_n(G) = G$$

est dit nilpotent.

On appelle représentation linéaire irréductible de degré $r > 0$ de G un morphisme

$$\rho : G \to GL(\mathbb{C}^r)$$

tel que les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^r$ stables par $\rho(G)$ soient $\{0\}$ et $\mathbb{C}^r$. Deux telles représentations sont dites équivalentes si, et seulement si,

$$\exists S \in GL_r(\mathbb{C}), \quad \forall g \in G, \qquad \rho_2(g) = S^{-1}\rho_1(g)S.$$

Le caractère d'une telle représentation ρ est

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto \operatorname{Tr} \rho(g).$$

Il ne dépend que de la classe d'équivalence de ρ.

On appelle fonction centrale de G dans $\mathbb{C}$ une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ constante sur chaque classe de conjugaison. Munissons leur espace du produit scalaire hermitien suivant :

$$\langle f, h \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \overline{f(g)}h(g).$$

Le fait fondamental est le suivant :

Théorème 1. – *Les caractères des représentations irréductibles non équivalentes de G forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales.*

(Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, p. 32.)

On en déduit :

1° Le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles de G est $k(G)$.

2° La somme des carrés de leurs degrés est $|G|$ (cela résulte de la relation

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{k(G)} |\langle f, \chi_i \rangle|^2$$

(Pythagore !) appliquée à

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g = 1 \\ 0 & \text{si} \quad g \neq 1 \end{cases}$$

En outre, le nombre de représentations irréductibles de degré 1 est $|G/G'|$; en effet $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ est abélien donc toute représentation ρ de G se factorise :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend right, "\rho"'] & G/G' \arrow[r, "\bar{\rho}"] & \mathbb{C}^*. \end{tikzcd}$$

G/G′ étant abélien, il a $|G/G'|$ représentations irréductibles de degré 1, d'où le résultat.

Pour $g \in G$, on notera

$$N_g = \{h \in G \mid hg = gh\}.$$

Pour $\lambda \in]0,1]$, on dira que G est un H_λ - groupe si

$$m(G) > \lambda |G|^2.$$

II. – LE THÉORÈME DE DIXON ET SES GÉNÉRALISATIONS.

Lemme 1. – $m(G) = |G|.k(G)$.

En effet on a

$$m(G) = \sum_{x \in G} |N_x| = \sum_{\substack{c \text{ classe} \\ \text{de conjugaison}}} \sum_{x \in C} |N_x|$$

$$= \sum_{\substack{c \text{ classe} \\ \text{de conjugaison}}} \sum_{x \in C} \frac{|G|}{|C|} = \sum_{\substack{c \text{ classe} \\ \text{de conjugaison}}} |G|$$

$$= |G|.k(G),$$

d'où le résultat.