GÉOMÉTRIE
L3 MATHÉMATIQUES– CONTRÔLE CONTINU 2
26 AVRIL 2022

PIERRE CALKA ET PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Les deux exercices sont indépendants l'un de l'autre. Une rédaction claire sera appréciée.

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $K = \mathbf{R}$.

Etant donnés un espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{E}$ et un élément $\vec{u}$ de $\overrightarrow{E}$, $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ désignera la translation de vecteur $\vec{u}$.

Questions de cours.

(1) Définir la puissance d'un point par rapport à une sphère.
(2) Enoncer et démontrer le théorème reliant angle inscrit et angle au centre.

Exercice I

On se place dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère affine orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixé.

Soit $r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application qui associe au point M de coordonnées (x, y, z) le point $r(M)$ de coordonnées (x', y', z'), où

$$\begin{cases} x^{'} = -\frac{9}{25}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{25}z + \frac{16}{5} \\ y^{'} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1 \\ z^{'} = -\frac{12}{25}x - \frac{3}{5}y - \frac{16}{25}z + \frac{13}{5}. \end{cases}$$

Etablir que r est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle.

Exercice II

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{E}$ et de dimension $n \geq 1$. On considère un vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ et une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tels que

$$f \circ f = t_{\vec{u}}.$$

(1) Etablir que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$.
(2) Soit $g = t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ f$. Montrer que $g \circ g = Id_{\mathcal{E}}$.
(3) Etablir que $\vec{g} = \vec{f}$.

On suppose dorénavant que $\vec{u} \neq \vec{0}$, que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension $n = 3$, que f est une isométrie de $\mathcal{E}$,
et que $\det(\vec{f}) = -1$.

(4) Montrer que $\vec{g}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous–espace vectoriel $\vec{F}$ de $\vec{E}$ de dimension 2.

Dorénavant on fixe un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$, on note A le point de coordonnées $(1, 0, 1)$, B le point de coordonnées $(2, 0, 2)$, C le point de coordonnées $(0, 1, 0)$ et D le point de coordonnées $(1, 1, 1)$.

(5) On suppose que $f(O) = A$ et $f(A) = B$. Déterminer $\vec{u}$.
(6) On suppose de plus que $f(C) = D$.
Donner l'expression analytique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.