L3 MATHÉMATIQUES, 2019–2020
THÉORIE DES GROUPES
CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE SECONDE SESSION
01 JUILLET 2020

PAUL LESCOT

Exercice I

(1) $e_G^n = e_G$, donc $e_G \in E_n(G)$: $E_n(G) \neq \emptyset$.
Soit $(x,y) \in E_n(G)^2$; alors $x^n = e_G$ et $y^n = e_G$, d'où

$$\begin{aligned}(xy^{-1})^n &= x^n(y^{-1})^n \\ &\quad \text{(car } G \text{ est abélien)} \\ &= x^n(y^n)^{-1} \\ &= e_G(e_G)^{-1} \\ &= e_G\,,\end{aligned}$$

et $xy^{-1} \in E_n(G)$.
$E_n(G)$ est donc bien un sous–groupe de G.

(2) Prenons $G = \Sigma_3$ (le groupe symétrique de degré 3) et $n = 2$. On voit facilement que

$$E_2(\Sigma_3) = \{Id, (12), (13), (23)\}.$$

Ce n'est pas un sous–groupe de G car

$$(12)(13) = (132) \notin \{Id, (12), (13), (23)\}.$$

On peut également invoquer le Théorème de Lagrange : $E_2(\Sigma_3)$, de cardinal 4, ne peut pas être un sous–groupe de Σ_3, d'ordre 6, car 4 ne divise pas 6.

Exercice II

(1) Pour chaque $x \in G$ on a $xx = x^2 = e_G$, donc $x = x^{-1}$. Il en résulte que, pour tout $(x,y) \in G^2$

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx.$$

Donc G est abélien.

(2) D'après le résultat de la question (1), chaque élément de G est d'ordre 1 ou 2. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G ; alors G contient un élément d'ordre p, donc $p = 2$. Il en résulte que 2 est le seul diviseur premier possible de l'ordre de G ; ce dernier est donc une puissance de 2.

(3) G étant un groupe fini abélien, on sait qu'il existe un entier n et des entiers $a_1, ..., a_n$ tels que $a_1 \geq 2$,

$$a_1|a_2|...|a_n$$

et

$$G \simeq \frac{\mathbf{Z}}{a_1\mathbf{Z}} \times ... \times \frac{\mathbf{Z}}{a_n\mathbf{Z}}.$$

Chaque a_i est l'ordre d'un élément de G, donc $a_i \in \{1, 2\}$; mais

$$a_i \geq a_1 \geq 2,$$

d'où $a_i = 2$ pour chaque i. Il apparaît que $G \simeq (\frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}})^n$.

Remarque. On peut procéder autrement : pour $m \in \mathbf{Z}$, notons $\bar{m}$ sa classe dans $\frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}}$, et, pour $g \in G$, posons

$$\bar{m}.g := g^m.$$

Cette action est bien définie (il faut le vérifier ...) et fait de G un $\frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}}$-espace vectoriel. Etant fini, cet espace est de dimension finie n, donc G est isomorphe, en tant que $\frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}}$-espace vecoriel, à $(\frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}})^n$. A plus forte raison lui est-il isomorphe comme groupe abélien, d'où (3). Mais alors $|G| = 2^n$, d'où (2).

Exercice III

Pour $r \in \mathbf{R}$, $\bar{r}$ désignera la classe de r modulo $\mathbf{Z}$, et pour $g \in G$, $\tilde{g}$ désignera la classe de g modulo H.

(1) Soit $h \in H$; alors $h = \bar{q} = q + \mathbf{Z}$ pour un $q \in Q$; mais alors $q \in \mathbf{R}$, d'où $h = q + \mathbf{Z} \in \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}} = G$. L'addition sur H étant la restriction de celle de G, on a le résultat.

(2) Soit $g \in H$; alors $g = \bar{q} = q + \mathbf{Z}$ pour un $q \in \mathbf{Q}$. On peut écrire $q = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} bg &= b\bar{q} \\ &= \overline{bq} \\ &= \bar{a} \\ &= a + \mathbf{Z} \\ &= \mathbf{Z} \\ &\quad (\text{car } a \in \mathbf{Z}) \\ &= 0_G \ ; \end{aligned}$$

g est donc d'ordre fini (diviseur de b).

Réciproquement, supposons $g \in G$ d'ordre fini n, et soit $g = \bar{q} = q + \mathbf{Z}$ pour un $q \in \mathbf{R}$.

Alors $\overline{bq} = b\bar{q} = bg = 0_G = \bar{0}$, soit $bq \in \mathbf{Z}$; il s'ensuit que

$$q = \frac{bq}{b} \in \mathbf{Q}$$

et

$$g = \bar{q} \in \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}} = H.$$

On note maintenant T le groupe quotient $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{Q}}$.

(3) On a

$$\frac{G}{H} = \frac{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}}}{\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}}} \simeq \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Q}} = T$$

en vertu du Troisième Théorème d'Isomorphisme.

(4) Soit $x = \tilde{g} \in \dfrac{G}{H}$ d'ordre fini $n \geq 1$; alors

$$\overline{ng} = n\tilde{g} = nx = 0_{\frac{G}{H}},$$

donc $ng \in H$; en vertu de (2), ng est d'ordre fini, donc il existe un entier $m \geq 1$ tel que $m(ng) = 0_G$.

Mais alors $(mn)g = 0_G$, donc g est d'ordre fini ; d'après (2), on a alors $g \in H$ d'où $x = \tilde{g} = 0_{\frac{G}{H}}$.

Dans le groupe $\dfrac{G}{H}$, l'élément neutre est ainsi le seul élément d'ordre fini; il en est donc de même dans le groupe isomorphe T.

Exercice 4

Dans Σ_4, soient $x := (1234)$ et $y = (13)$; alors x est d'ordre 4, y est d'ordre 2 et

$$yxy^{-1} = yxy = (13)(1234)(13) = (1432) = x^{-1}.$$

Le sous–groupe $< x, y >$ de Σ_4 est donc isomorphe à D_8.

On pouvait aussi raisonner géométriquement : D_8 est isomorphe qu groupe des isométries du plan laissant invariant un carré. Chaque élément de D_8 définit ainsi une permutation des quatre sommets du carré ; on obtient de cette manière un morphisme injectif (à vérifier) de D_8 dans le groupe des permutations de l'ensemble des sommets, lequel est isomorpheà Σ_4.