GÉOMÉTRIE
CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU
DU 26 AVRIL 2022

PIERRE CALKA ET PAUL LESCOT

Questions de cours.

Voir le cours.

Exercice I

La partie linéaire $\vec{r}$ de r transforme le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\overrightarrow{E}$ en le vecteur de coordonnées $(x^{''}, y^{''}, z^{''})$ dans cette même base, où

$$\begin{cases} x^{''} = -\frac{9}{25}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{25}z \\ y^{''} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z \\ z^{''} = -\frac{12}{25}x - \frac{3}{5}y - \frac{16}{25}z \end{cases}$$

La matrice M de $\vec{r}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que ${}^tMM = I_3$; $\vec{r}$ est donc une isométrie de $\overrightarrow{E}$, donc r est une isométrie de $\mathcal{E}$.

De plus

$$\begin{aligned} \det(\vec{r}) &= \det(M) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{25} \end{bmatrix} \\ &= ((-\frac{9}{25}).0.(-\frac{16}{25})) + ((\frac{4}{5})(-\frac{3}{5})(-\frac{12}{25})) + ((-\frac{12}{25})(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5})) \\ &\quad -((-\frac{12}{25}).0.(-\frac{12}{25}) + (-\frac{3}{5})(-\frac{3}{5})(-\frac{9}{25}) + (-\frac{16}{25})(\frac{4}{5})(\frac{4}{5})) \\ &= \frac{288}{625} - (\frac{-337}{625}) \\ &= \frac{625}{625} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc $\vec{r} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ est une rotation. Il en résulte que r est un vissage.

Cherchons les éventuels points fixes de r. Le point M de coordonnées (x, y, z) est invariant par r si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$, soit

$$\begin{cases} x = -\frac{9}{25}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{25}z + \frac{16}{5} \\ y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1 \\ z = -\frac{12}{25}x - \frac{3}{5}y - \frac{16}{25}z + \frac{13}{5} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1 \\ x = -\frac{9}{25}x + \frac{4}{5}(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1) - \frac{12}{25}z + \frac{16}{5} \\ z = -\frac{12}{25}x - \frac{3}{5}(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1) - \frac{16}{25}z + \frac{13}{5}, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1 \\ x = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}z + \frac{12}{5} \\ z = -\frac{24}{25}x - \frac{7}{25}z + \frac{16}{5}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1 \\ x = -\frac{4}{3}z + \frac{10}{3} \\ z = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}, \end{cases}$$

c'est–à–dire

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - 1 \\ z = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}) - 1 \\ z = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} \\ z = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}; \end{cases}$$

r est donc une rotation.

Son axe $\mathcal{D}$ est dirigé par le vecteur de coordonnées $(4, 5, -3)$ et passe par le point de coordonnées $(2, 0, 1)$.

Pour déterminer l'angle θ de r, on peut construire une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans laquelle $\vec{u}$ appartient à la direction $\vec{D}$ de l'axe $\mathcal{D}$. Si P désigne la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on aura

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

et le calcul nous donnera $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Ici un argument de trace permet d'abréger les efforts :

$$1 + 2\cos(\theta) = Tr(P^{-1}MP) = Tr(M) = -1$$

d'où $\cos(\theta) = -1$ et $\theta \equiv \pi[2\pi]$.

Exercice II

Rappelons que pour chaque vecteur $\vec{v} \in \overrightarrow{E}$, on a

$$f \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{f}(\vec{v})} \circ f.$$

(1) Vu que $f \circ f = t_{\vec{u}}$, $f \circ f$ est bijective, donc f est bijective. On a

$$\begin{aligned} t_{\vec{f}(\vec{u})} \circ f &= f \circ t_{\vec{u}} \\ &= f \circ (f \circ f) \\ &= (f \circ f) \circ f \\ &= t_{\vec{u}} \circ f. \end{aligned}$$

En composant à droite avec l'inverse f^{-1} de f (ce qui est légitime car f est bijective) on obtient que $t_{\vec{f}(\vec{u})} = t_{\vec{u}}$, d'où $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$.

(2) On a

$$\begin{aligned} f \circ t_{-\frac{\vec{u}}{2}} &= t_{\vec{f}(-\frac{\vec{u}}{2})} \circ f \\ &= t_{-\frac{\vec{f}(\vec{u})}{2}} \circ f \\ &= t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ f \end{aligned}$$

(d'après (1)).

Il en résulte que

$$\begin{aligned} g \circ g &= (t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ f) \circ (t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ f) \\ &= t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ (f \circ t_{-\frac{\vec{u}}{2}}) \circ f \\ &= t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ (t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ f) \circ f \\ &= t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ (f \circ f) \\ &= t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ t_{\vec{u}} \\ &= t_{2(-\frac{\vec{u}}{2})+\vec{u}} \\ &= t_{0_{\vec{E}}} \\ &= Id_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

(3) Il apparaît que

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \overrightarrow{f \circ t_{\vec{u}}} \\ &= \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{t_{\vec{u}}} \\ &= \vec{f} \circ Id_{\overrightarrow{E}} \\ &= \vec{f}. \end{aligned}$$

(4) Vu que f est une isométrie de $\mathcal{E}$, $\vec{f}$ est une isométrie de $\overrightarrow{E}$. Du fait que $\det(\vec{f}) = -1$, $\vec{f}$ est l'opposé d'une rotation vectorielle $\vec{h} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$.

D'après (1) on a $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$, donc $\vec{h}(\vec{u}) = -\vec{u}$. $\vec{h}$ est donc une rotation vectorielle possédant la valeur propre -1 ; c'est donc la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.

$\vec{g} = \vec{f} = -\vec{h}$ est alors la symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel.

(5) On a

$$\begin{array}{rcl} t_{\vec{u}}(O) & = & (f \circ f)(O) \\ & = & f(f(O)) \\ & = & f(A) \\ & = & B \end{array}$$

d'où

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{k}.$$

(6) On a

$$\begin{array}{rcl} \vec{f}(\vec{j}) & = & \vec{f}(\overrightarrow{OC}) \\ & = & \overrightarrow{f(O)f(C)} \\ & = & \overrightarrow{AD} \\ & = & \vec{j}. \end{array}$$

Par ailleurs on a vu que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. $\overrightarrow{F}$, étant l'ensemble des vecteurs fixes par $\vec{g} = \vec{f}$, contient donc $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ et $\vec{j}$; vu que ces deux vecteurs sont indépendants, $\vec{F}$ est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{j}$. $\overrightarrow{F}$ est donc contenu dans le plan d'équation (dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) $x = z$; il lui est donc égal.

$\vec{f} = \vec{g}$ étant la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{F}$, on trouve que l'image par $\vec{f}$ du vecteur de coordonnées (x, y, z) est le vecteur de coordonnées (z, y, x).

Il en résulte l'existence de trois réels a, b et c tels que, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, f soit donnée par

$$f(x, y, z) = (z + a, y + b, x + c).$$

Du fait que $f(O) = A$, on détermine que $(a, b, c) = (1, 0, 1)$, soit $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$.

Il s'ensuit que lorsque M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $f(M)$ y a pour coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{'} = z + 1 \\ y^{'} = y \\ z^{'} = x + 1. \end{array} \right.$$

On peut vérifier que cette application possède bien toutes les propriétés requises.