L3 MATHÉMATIQUES–OPTION GÉOMÉTRIE
CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU DU 11 MARS 2022

PIERRE CALKA ET PAUL LESCOT

Questions de cours.

(1) Voir la Définition 2.1, p.7 du cours.
(2) Voir la Proposition 3.6, p.23 du cours.

Exercice I

Comme il est usuel, nous identifierons le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \overrightarrow{E}$ au triplet $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(1) Il suffit de montrer que la famille (A, B, C) est affinement indépendante, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre. Or $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1)$ ne sont pas colinéaires, d'où le résultat.

(2) La direction $\overrightarrow{P_1}$ de $\mathcal{P}_1$ est engendrée par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Le point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}_1$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ appartient à $\overrightarrow{P_1}$, c'est–à–dire si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

soit

$$(x - 1, y, z + 1) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(0, 2, 1).$$

On en déduit les équations paramétriques de $\mathcal{P}_1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda + 1 \\ y = \lambda + 2\mu. \\ z = \mu - 1 \end{array}\right.$$

(3) Il suffit d'éliminer λ et μ des équations ci–dessus :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda + 1 \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \mu - 1 \end{array}\right.$$

équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 - x \\ y = 1 - x + 2\mu, \\ z = \mu - 1 \end{array}\right.$$

soit

$$\begin{cases} \mu = 1 + z \\ \lambda = 1 - x, \\ y = 1 - x + 2(1+z) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \mu = 1 + z \\ \lambda = 1 - x. \\ y = 3 - x + 2z \end{cases}$$

$y = 3 - x + 2z$ est donc une équation affine de $\mathcal{P}_1$. Elle équivaut à

$$x + y - 2z - 3 = 0,$$

donc

$$x + y - 2z - 3 = 0$$

est une équation affine de $\mathcal{P}_1$.

(4) Le raisonnement est le même qu'en (1). Il suffit de montrer que la famille (D, F, G) est affinement indépendante, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DG})$ est libre. Or $\overrightarrow{DF} = (-3, -4, -2)$ et $\overrightarrow{DG} = (-2, -3, -1)$ ne sont pas colinéaires, d'où le résultat.

(5) Le point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $\overrightarrow{DM}$ appartient à $\overrightarrow{P_2}$, c'est–à–dire si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{DM} = \lambda \overrightarrow{DF} + \mu \overrightarrow{DG}$$

soit

$$(x - 3, y - 2, z) = \lambda(-3, -4, -2) + \mu(-2, -3, -1).$$

On en déduit les équations paramétriques de $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{cases} x = -3\lambda - 2\mu + 3 \\ y = -4\lambda - 3\mu + 2. \\ z = -2\lambda - \mu \end{cases}$$

(6) Il suffit d'éliminer λ et μ des équations ci–dessus :

$$\begin{cases} x = -3\lambda - 2\mu + 3 \\ y = -4\lambda - 3\mu + 2. \\ z = -2\lambda - \mu \end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{cases} \mu = -2\lambda - z \\ x = -3\lambda - 2(-2\lambda - z) + 3, \\ y = -4\lambda - 3(-2\lambda - z) + 2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \mu = -2\lambda - z \\ x = \lambda + 2z + 3, \\ y = 2\lambda + 3z + 2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \mu = -2\lambda - z \\ \lambda = x - 2z - 3. \\ y = 2(x-2z-3) + 3z + 2 \end{cases}$$

$y = 2(x-2z-3)+3z+2$ est donc une équation affine de $\mathcal{P}_2$. Elle équivaut à

$$y = 2x - z - 4.$$

Donc

$$2x - y - z - 4 = 0$$

est une équation affine de $\mathcal{P}_2$.

(7) Le point (x, y, z) appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - z - 4 = 0, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = 2z - y + 3 \\ 2(2z - y + 3) - y - z - 4 = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = 2z - y + 3 \\ 3z - 3y + 2 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z = y - \frac{2}{3} \\ x = 2(y - \frac{2}{3}) - y + 3, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} z = y - \frac{2}{3} \\ x = y + \frac{5}{3} \end{cases}$$

et

$$M = (x, y, z) = (y + \frac{5}{3}, y, y - \frac{2}{3}).$$

L'ensemble des points $(y + \frac{5}{3}, y, y - \frac{2}{3})(y \in \mathbf{R})$ est bien une droite affine, dont $\vec{w} := (1, 1, 1)$ est un vecteur directeur, et

$$(\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3})$$

un point.

(8) La direction $\overrightarrow{P_3}$ est d'équation $y + 2z = 0$, donc $\vec{w} \notin \overrightarrow{P_3}$ et $\overrightarrow{D} \subsetneq \overrightarrow{P_3}$; on a donc

$$\overrightarrow{D} \cap \overrightarrow{P_3} \subsetneq \overrightarrow{D}.$$

Vu que $\overrightarrow{D}$ est de dimension 1, on a nécessairement $\overrightarrow{D} \cap \overrightarrow{P_3} = \{0_{\overrightarrow{E}}\}$ et la somme

$$\overrightarrow{D} + \overrightarrow{P_3}$$

est directe. Mais alors

$$\dim(\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{P_3}) = \dim(\overrightarrow{D}) + \dim(\overrightarrow{P_3}) = 2 + 1 = 3 = \dim(\overrightarrow{E})$$

et

$$\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{P_3} = \overrightarrow{E}.$$

(9) Soit M de coordonnées (x, y, z). Alors $\overrightarrow{Mp(M)} \in \mathbf{R}.\vec{w}$, donc $\overrightarrow{Mp(M)} = \alpha.\vec{w}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). Mais alors $p(M)$ a pour coordonnées $(x + \alpha, y + \alpha, z + \alpha)$; en écrivant que $p(M) \in \mathcal{P}$, on obtient

$$y + \alpha + 2(z + \alpha) - 6 = 0$$

soit

$$y + 2z + 3\alpha - 6 = 0$$

et

$$\alpha = \frac{6 - y - 2z}{3}.$$

On en déduit les coordonnées de $p(M)$:

$$(\frac{6 + 3x - y - 2z}{3}, \frac{6 + 2y - 2z}{3}, \frac{6 - y + z}{3}),$$

soit

$$(x - \frac{y}{3} - \frac{2z}{3} + 2, \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} + 2, -\frac{y}{3} + \frac{z}{3} + 2).$$

Exercice II

(1) Le plus simple est d'employer le calcul barycentrique. On cherche (D, E, F) tel que

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F \\ B = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}F. \\ C = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E \end{cases}$$

Cela revient à

$$\begin{cases} F = 2A - E \\ B = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}(2A - E), \\ C = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} F = 2A - E \\ B = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}(2A - E), \\ C = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} F = 2A - E \\ B = \dfrac{1}{2}D + A - \dfrac{1}{2}E. \\ D = 2C - E \end{cases}$$

En d'autres termes :

$$\begin{cases} F = 2A - E \\ D = 2C - E, \\ B = \dfrac{1}{2}(2C - E) + A - \dfrac{1}{2}E \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} F = 2A - E \\ D = 2C - E, \\ B = C + A - E \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} F = 2A - E \\ D = 2C - E, \\ E = C + A - B \end{cases}$$

c'est–à–dire

$$\begin{cases} F = 2A - (C + A - B) \\ D = 2C - (C + A - B), \\ E = C + A - B \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} F = A + B - C \\ D = C + B - A. \\ E = C + A - B \end{cases}$$

On a donc bien établi l'unicité du triplet (D, E, F).

(2) Vu que A, B et C ne sont pas alignés, le sous–espace affine de $\mathcal{P}$ engendré par (A, B, C) est $\mathcal{P}$ lui–même ; (A, B, C) est donc un repère affine de $\mathcal{P}$. L'énoncé s'ensuit.

(3) On a

$$\begin{aligned} \vec{g}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{g(A)g(B)} \\ &= \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA}) \\ &= -2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \vec{g}(\overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{g(A)g(C)} \\ &= \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} \\ &= (\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA}) \\ &= -2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Donc $\vec{g}$ et $-2Id_{\overrightarrow{E}}$ coïncident sur

$$Vect(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{E}$$

et

$$\vec{g} = -2Id_{\vec{E}}.$$

La partie linéaire de g est donc une homothétie de rapport $-2 \neq 1$; il en résulte que g est une homothétie affine de rapport -2. Il suffit donc, afin d'identifier g, d'en déterminer un point fixe. Ce point en est nécessairement le centre.

Soit donc $G := \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ l'isobarycentre de (A, B, C). On a

$$\begin{aligned}
g(G) &= g(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C) \\
&= \frac{1}{3}g(A) + \frac{1}{3}g(B) + \frac{1}{3}g(C) \\
&= \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}E + \frac{1}{3}F \\
&= \frac{1}{3}(C + B - A) + \frac{1}{3}(C + A - B) + \frac{1}{3}(A + B - C) \\
&= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \\
&= G.
\end{aligned}$$

G est donc le centre de g: $g = h_{G,-2}$ est l'homothétie de centre G et de rapport -2.