GÉOMÉTRIE
L3 MATHÉMATIQUES– CONTRÔLE CONTINU 1
11 MARS 2022

PIERRE CALKA ET PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Les deux exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée.

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $K = \mathbf{R}$.

Questions de cours.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

(1) Donner la définition d'une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
(2) Montrer qu'une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même est affine si et seulement si elle préserve les barycentres.

Exercice I

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère affine $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixé.

Soient A le point de coordonnées $(1, 0, -1)$, B le point de coordonnées $(0, 1, -1)$, C le point de coordonnées $(1, 2, 0)$, D le point de coordonnées $(3, 2, 0)$, F le point de coordonnées $(0, -2, -2)$ et G le point de coordonnées $(1, -1, -1)$. On note $\mathcal{P}_1$ le sous–espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\{A, B, C\}$ et $\mathcal{P}_2$ le sous–espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\{D, F, G\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{P}_1$ est un plan affine.
(2) Trouver des équations paramétriques pour $\mathcal{P}_1$.
(3) Trouver une équation affine de $\mathcal{P}_1$.
(4) Montrer que $\mathcal{P}_2$ est un plan affine.
(5) Trouver des équations paramétriques pour $\mathcal{P}_2$.
(6) Trouver une équation affine de $\mathcal{P}_2$.
(7) Soit $\mathcal{D} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Etablir que $\mathcal{D}$ est une droite affine, dont on déterminera un point et un vecteur directeur.
(8) Soit $\mathcal{P}_3$ le plan affine d'équation $y + 2z - 6 = 0$. Etablir que les directions $\overrightarrow{D}$ de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{P_3}$ de $\mathcal{P}_3$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$.
(9) Soit p la projection affine sur $\mathcal{P}_3$ le long de la direction $\overrightarrow{D}$ et soit M un point de coordonnées (x, y, z). Déterminer les coordonnées de $p(M)$.

Exercice II

On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$, non alignés.

(1) Etablir l'existence d'un unique triplet (D, E, F) de points de $\mathcal{P}$ tel que A soit le milieu de $[EF]$, que B soit le milieu de $[DF]$ et que C soit le milieu de $[DE]$.

(2) Montrer qu'existe une unique application affine $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle que
$g(A) = D$, $g(B) = E$ et $g(C) = F$.

(3) Identifier g.

(4) Faire un dessin !