L3 MATHÉMATIQUES, 2021–2022
THÉORIE DES GROUPES
EXAMEN DU 11 JANVIER 2022 (14H-16H, AMPHI D)

PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Les quatre exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée.

Notations, définitions et rappels.

Si G est un groupe, on note e_G son élément neutre. On rappelle que le **centre** de G est défini par

$$Z(G) := \{x \in G \,|\, (\forall y \in G)\, xy = yx\}\,;$$

il s'agit d'un sous–groupe abélien et distingué de G.

Sauf précision contraire, le produit direct $C = A \times B$ de deux groupes $(A, *_A)$ et $(B, *_B)$ sera muni de la loi produit naturelle $*_C$:

$$\forall (a, a^{'}, b, b^{'}) \in A \times A \times B \times B \;\; (a, b) *_C (a^{'}, b^{'}) := (a *_A a^{'}, b *_B b^{'}).$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, Σ_n désignera le groupe symétrique de degré n, $\mathcal{A}_n$ le groupe alterné de degré n, et D_{2n} le groupe diédral d'ordre $2n$.

Pour p premier, $\mathbf{F}_p$ désignera le corps $\dfrac{\mathbf{Z}}{p\mathbf{Z}}$, et $\mathbf{F}_p^*$ le groupe multiplicatif $\mathbf{F}_p \setminus \{\bar{0}\}$.

Excepté dans l'exercice II, les groupes considérés sont notés multiplicativement.

Si G est un groupe abélien noté additivement, on note, pour $x \in G$ et $n \geq 1$:

$$nx = \underbrace{x + ... + x}_{n \text{ termes}}.$$

Exercice I

Soit G un groupe d'ordre $|G| = 1805$, et soit n_5 le nombre de sous–groupes d'ordre 5 dans G.

(1) Quelles sont les valeurs possibles de n_5 ?
(2) Si $n_5 \neq 1$, établir que G contient un et un seul sous–groupe d'ordre 361.
(3) Déduire de ce qui précède que G n'est pas simple.

Exercice II

On considère le groupe $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels muni de l'addition ; c'est un groupe abélien, l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs en est un sous–groupe, distingué car $\mathbf{Q}$ est abélien. On pose $G = \dfrac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}}$.

(1) Montrer que chaque élément de G est d'ordre fini.

Dorénavant, p désignera un nombre premier fixé.

(2) Soit

$$G_{p,n} := \{x \in G \,|\, p^n x = 0_G\}.$$

Établir que $G_{p,n}$ est un sous–groupe de G, d'ordre p^n.

(3) Montrer que $G_{p,n}$ est **l'unique** sous–groupe de G d'ordre p^n.

Exercice III

Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers premiers entre eux, et soit

$$G := D_{2m} \times D_{2n}.$$

(1) Montrer que G contient un sous–groupe H isomorphe à D_{2mn}.

(2) Établir que H est distingué dans G.

Exercice IV

Soit p un nombre premier. On note $GL_2(\mathbf{F}_p)$ le groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbf{F}_p$:

$$GL_2(\mathbf{F}_p) := \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} |(a,b,c,d) \in \mathbf{F}_p^4, ad - bc \neq \bar{0}\}.$$

(1) Déterminer l'ordre de $GL_2(\mathbf{F}_p)$ (on pourra, dans l'énumération, distinguer les cas $a = \bar{0}$ et $a \neq \bar{0}$).

(2) Soit $\det : GL_2(\mathbf{F}_p) \to \mathbf{F}_p^*$ l'application *déterminant* définie par

$$\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) := ad - bc.$$

Monter qu'il s'agit d'un morphisme de groupes, surjectif.

(3) Soit $SL_2(\mathbf{F}_p) = \ker(\det)$. Déterminer l'ordre de $SL_2(\mathbf{F}_p)$.

(4) Etablir que $GL_2(\mathbf{F}_2) \simeq \Sigma_3$ (*indication* : on pourra d'abord montrer que $GL_2(\mathbf{F}_2)$ est d'ordre 6 et non–commutatif).

(5) (**bonus**) Montrer que

$$\frac{SL_2(\mathbf{F}_3)}{Z(SL_2(\mathbf{F}_3))} \simeq \mathcal{A}_4.$$