L3 MATHÉMATIQUES, 2020–2021
THÉORIE DES GROUPES
EXAMEN DU 06 JANVIER 2021, 14H-16H

PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Les quatre exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée. Barème approximatif : 8 + 8 + 8 puis N/24 devient N/20.

Notations.

Si G est un groupe, on note e_G son élément neutre. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, Σ_n désigne le groupe symétrique de degré n, et D_{2n} le groupe diédral d'ordre $2n$.

Les groupes considérés sont notés multiplicativement.

Exercice I

On se place dans le groupe symétrique Σ_n.

(1) Soit $\sigma \in \Sigma_n$ un cycle de longueur $l \geq 2$. Décrire la décomposition en cycles de σ^2 (on pourra distinguer selon la parité de l).

(2) Soit $\sigma^{'} = \sigma^2$ un carré dans Σ_n. Montrer que, pour chaque entier $k \geq 2$ pair, le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition en cycles de $\sigma^{'}$ est pair.

(3) Réciproquement, soit $\sigma^{'} \in \Sigma_n$ ayant la propriété que pour chaque entier $k \geq 2$ pair, le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition en cycles de $\sigma^{'}$ est pair. Montrer que $\sigma^{'}$ est un carré.

(4) Combien y a-t-il de carrés dans Σ_5 ?

Exercice II

Soit $G = D_{2n}$ un groupe diédral d'ordre $2n$: G est engendré par deux éléments x et y tels que $\omega(x) = n$, $\omega(y) = 2$ et $y^{-1}xy = x^{-1}$. On considère plusieurs sous–groupes de G : pour k diviseur de n, $A_k =< x^k >$, et, pour k diviseur de n et $0 \leq l \leq k-1$, $B_{k,l} =< x^k, yx^l >$.

(1) Montrer que A_k est distingué dans G, et que
$$\frac{G}{A_k} \simeq D_{2k}.$$

(2) Établir que $B_{k,l} \simeq D_{2\frac{n}{k}}$

(3) Soit H un sous–groupe de G.
Montrer que soit $H \subset < x >$, soit $|H : H \cap < x > | = 2$.

(4) On suppose dans cette question que $H \subset < x >$. Établir que H est égal à l'un des A_k.

(5) Supposons maintenant $|H : H \cap < x > | = 2$. Montrer que H est égal à l'un des $B_{k,l}$.

Exercice III

(1) Soit S un groupe d'ordre p premier. Montrer que $Aut(S)$ est d'ordre $p-1$.

Soit dorénavant G un groupe d'ordre $|G| = 539$.

(2) Établir que G contient un unique sous–groupe S d'ordre 11 et un unique sous–groupe T d'ordre 49.

(3) Soit

$$\theta \quad : \quad T \to Aut(S)$$

défini par

$$(\forall s \in S)(\forall t \in T)\, \theta(t)(s) := tst^{-1}.$$

Montrer que θ est bien défini, puis qu'il s'agit d'un morphisme de groupes.

(4) Établir que

$$(\forall t \in T)\ \theta(t) = Id_S.$$

(5) Prouver que $G \simeq S \times T$.

(6) Établir que G est abélien.

(7) Au moyen des questions précédentes, établir que G est isomorphe soit à $\dfrac{\mathbf{Z}}{539\mathbf{Z}}$, soit à un groupe que l'on déterminera.