Université de Rouen
L3-Mathématiques
Calcul Scientifique et Statistique

Examen du 15 mai 2019. Durée 1h30. Documents autorisés.
Calcul Scientifique

Il faut grouper les programmes écrits pendant le contrôle dans un dossier
`votreNOM_votrePRENOM`
La première ligne de chaque fichier doit mentionner (en commentaire)
`// votreNOM_votrePRENOM`
À la fin du contrôle vous allez copier ce dossier sur la clé USB du professeur.
Toute connexion à la messagerie électronique est strictement interdite pendant l'examen.

Nous nous proposons de résoudre l'équation de la chaleur : trouver $u : [0,L] \times [0,t_{max}] \to \mathbb{R}, (x,t) \to u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x,t) \in]0,L[\times]0,t_{max}] \tag{1}$$

$$\text{avec la condition initiale (à } t=0) \ : \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$\text{et les conditions aux limites de Dirichlet} \ : \quad u(0,t) = \alpha, \quad u(L,t) = \beta, \quad \forall t > 0. \tag{3}$$

Considérons la discrétisation du problème
en espace

$$[0,L] = \bigcup_{i=0}^{N} [x_i, x_{i+1}],\ x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,(N+1),\ h = L/(N+1), \tag{4}$$

et *en temps*

$$[0,t_{max}] = \bigcup_{m=0}^{M-1} [t_m, t_{m+1}],\ t_m = m\delta t,\ \delta t = t_{max}/M. \tag{5}$$

On note par $u_i^m = u(x_i, t_m)$.
Les inconnues du problème sont les valeurs $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ **et on considère que** $u_0 = \alpha$ **et** $u_{N+1} = \beta$**.**

Nous utiliserons le schéma semi-implicite aux différences finies suivant (**schéma de Crank-Nicolson**) :

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} - \frac{1}{2}\left[\kappa \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} + \kappa \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2}\right] = 0, \quad i = 1,2,\ldots N, \tag{6}$$

qui permet d'avancer la solution en temps, de t_m à t_{m+1}.

Exercice 1, à rendre sur papier (3 points)

L'équation (6) représente un système linéaire. Si U est le vecteur des inconnues à l'instant t_{m+1} et U_P le vecteur des inconnues à l'instant t_m,

$$U = \left(u_1^{m+1}, u_2^{m+1}, \ldots, u_N^{m+1}\right)^T, \quad U_P = \left(u_1^m, u_2^m, \ldots, u_N^m\right)^T,$$

écrire le système (6) sous la forme :

$$MU = Q. \tag{7}$$

Donner la forme de la matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et exprimer le second membre $Q \in \mathbb{R}^N$ sous la forme $Q = BU_P$, avec $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice à déterminer.
Corriger ensuite $Q(1)$ et $Q(N)$ pour tenir compte des conditions aux limites (3).

Exercice 2 (7 points) Résolution numérique de l'équation (1) avec le schéma de Crank-Nicolson

Considérons les données suivantes :
• condition initiale :

$$u_0(x) = (1-\frac{x}{L})\alpha + \sum_{i=1}^{2} A(i)\sin\left(w(i)\frac{\pi}{L}x\right), \quad w = (1,10)^T, \quad A = (1,\frac{1}{4})^T \tag{8}$$

- conditions aux limites : $\alpha = 1, \quad \beta = 0,$
- paramètres numériques : $\kappa = 0.1, \quad L = 1, \quad N = 49, \quad h = L/(N+1),$
- pas de temps, calculé suivant : $\delta t = \frac{2}{\kappa}\cdot\frac{1}{2}h^2,$
- temps maximal (arrêt du calcul) : $t_{max} = 20\,\delta t.$

La solution exacte du problème est :

$$u(x,t) = (1-\frac{x}{L})\alpha + \sum_{i=1}^{2} A(i)\exp\left(-\left(w(i)\frac{\pi}{L}\right)^2\kappa t\right)\sin\left(w(i)\frac{\pi}{L}x\right), \quad w = (1,10)^T, \quad A = (1,\frac{1}{4})^T. \tag{9}$$

→ **(A)** (fichier de fonctions **votreNOM_func_ex2.sci**)

(a) (1 pts) Ecrire les fonctions Scilab correspondant aux formules (8) et (9).

→**(B)** (fichier programme principal **votreNOM_test_ex2.sci**)

Définir les paramètres numériques ci-dessus.
(b) (1 pts) Construire le vecteur X de dimension N contenant les abscisses des points discrets $x_1,\ldots,x_N$. Construire le vecteur U0 de dimension N qui contient les valeurs de la condition initiale (8) pour les points de discrétisation $x_1,\ldots,x_N$. Représenter graphiquement U0.

(c) (1 pts) Suivant l'exercice 1, construire les matrices $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

(d) (4 pts) Construire la boucle en temps et finaliser le programme pour résoudre l'équation (1).
Pour chaque pas de temps, tracer la solution numérique et comparer avec la solution exacte (9).

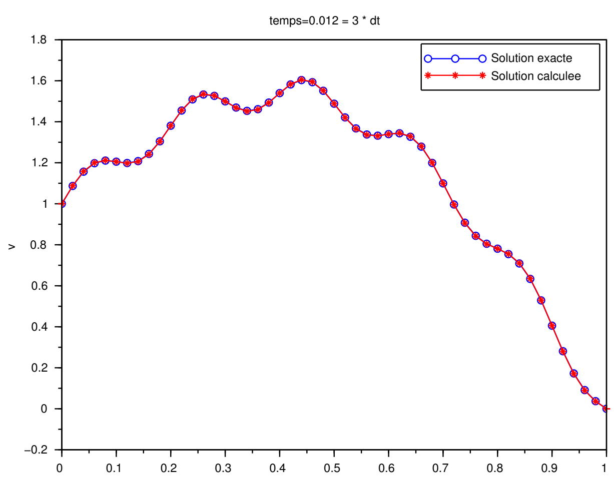

FIGURE 1 – Illustration des résultats (solution après 3 pas de temps).