
Examen du 22 mai 2018. Durée 1h30.
Calcul Scientifique

Il faut grouper les programmes écrits pendant le contrôle dans un dossier

votreNOM_votrePRENOM

La première ligne de chaque fichier doit mentionner (en commentaire)

// votreNOM_votrePRENOM

À la fin du contrôle vous allez copier ce dossier sur la clé USB du professeur.

Toute connexion à la messagerie électronique est strictement interdite pendant l'examen.

La température $T : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow T(x)$, vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -T'(x) + k(x)T(x) = g(x), & 0 < x < L \\ T(0) = \alpha, & T(L) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

avec $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles données. On prend $L = 1$ et :

$$\begin{cases} k(x) = (1 - x), & x \in]0, 1[\\ g(x) = x(1 + x^2)e^x, & x \in]0, 1[\\ \alpha = 1, & \beta = 0, \end{cases} \quad (2)$$

Pour ce cas particulier, la solution exacte est :

$$T_{exact}(x) = (1 - x^2)e^x. \quad (3)$$

Pour résoudre cette équation, considérons la discrétisation du domaine de définition **avec $(N + 2)$ points** :

$$[0, L] = \bigcup_{i=0}^N [x_i, x_{i+1}], \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, (N + 1), \quad h = L/(N + 1), \quad (4)$$

Exercice 1, à rendre sur papier (2 points)

Ecrire la forme discrète de l'équation (1) en utilisant le **schéma explicite** aux différences finies suivant :

$$T'_i \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}. \quad (5)$$

• En observant que les inconnues du problème sont les valeurs T_1, T_2, \dots, T_N écrire la forme matricielle du système linéaire final (de dimension N) : $A \cdot T = Q$ qui permettra de calculer le vecteur $T = (T_i)_{1 \leq i \leq N}$.

Indication : on écrit l'équation (1) pour $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, et on utilise les schémas aux différences finies (5). On va prendre en compte le fait que, pour les points fictifs $i = 0$ et $i = (N + 1)$ on a :

$$T_0 = \alpha, \quad T_{N+1} = \beta, \quad (\text{conditions aux limites}) \text{ et}$$

$$g_0 = g(x)|_{x=0}, \quad g_{N+1} = g(x)|_{x=L}$$

Exercice 2 (8 points) Résolution numérique de l'équation (1) avec le schéma explicite

→ (A) (fichier de fonctions **vousreNOM_func_ex2.sci**)

(a) (1 pts) Ecrire les fonctions Scilab correspondant aux formules (2) et (3).

→ (B) (fichier programme principal **vousreNOM_test_ex2.sci**)

Définir les paramètres $N = 20$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(b) (1 pts) Construire le vecteur X de dimension N contenant les abscisses des points discrets x_1, \dots, x_N . Construire le vecteur Tex de dimension N qui contient les valeurs de la solution exacte (3) pour les points de discrétisation x_1, \dots, x_N . Représenter graphiquement $Tex(X)$.

(c) (2 pts) Construire les vecteurs $K = (k_i)$ et $G = (g_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Construire la matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et le second membre $Q \in \mathbb{R}^N$ du système linéaire final (cf. Exercice 1).

(d) (2 pts) Résoudre le système linéaire en utilisant une méthode disponible sous Scilab et trouver la solution T (vecteur de dimension N). Comparer graphiquement avec la solution exacte tracée (point b).

(e) (2 pts) Ordre de la méthode (fichier programme principal **vousreNOM_test_ex2ordre.sci**).

Calculer l'erreur $\varepsilon = \|T - T_{exact}\|_\infty$ pour les valeurs $N = 20, 40, \dots, 200$.

Montrer que ε varie comme h^2 en traçant les courbes : $\log(\varepsilon)$ en fonction de $\log(h)$ et $\log(h^2)$ en fonction de $\log(h)$. Vous pouvez utiliser la fonction `plot2d` pour tracer ε en fonction de h en utilisant les coordonnées logarithmiques pour les axes.

Exercice 3 (14 points) Résolution numérique de l'équation (1) avec un schéma implicite

Pour cette partie, nous utiliserons le schéma implicite suivant :

$$T'_{i+1} + 4T'_i + T'_{i-1} = \frac{3}{h} (T_{i+1} - T_{i-1}) + O(h^4). \quad (6)$$

(a) (4 points) (à rendre sur papier) Ecrire la nouvelle forme matricielle du système linéaire final (de dimension N) : $A \cdot T = Q$ qui permettra de calculer le vecteur $T = (T_i)_{1 \leq i \leq N}$.

(b) (4 points) (fichier programme principal **vousreNOM_test_ex3.sci**).

Résoudre l'équation (1) avec le schéma implicite (6). Comparer la solution numérique avec la solution exacte.

(c) (4 points) (fichier programme principal **vousreNOM_test_ex3ordre.sci**).

Trouver numériquement (en procédant comme à l'exercice 2) que l'ordre de la nouvelle méthode est 4.

(d) (bonus 2 points) (à rendre sur papier) Démontrer que le schéma (6) est bien d'ordre 4.

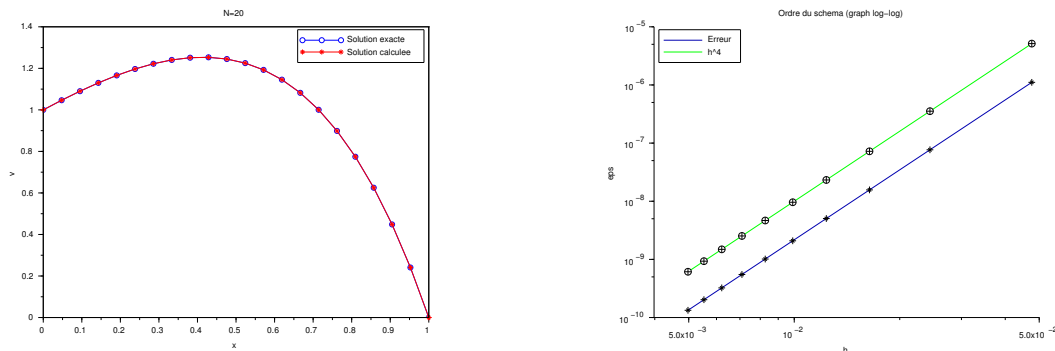


FIGURE 1 – Les graphiques qu'il faut obtenir pour l'exercice 3.