Université de Rouen
L3-Mathématiques
Calcul Scientifique et Statistique

Contrôle continu du 27 février 2018. Durée 2 heures.
TP Scilab.

Il faut grouper les programmes écrits pendant le contrôle dans un dossier
`votreNOM_votrePRENOM`
La première ligne de chaque fichier doit mentionner (en commentaire)
`// votreNOM_votrePRENOM`
À la fin du contrôle vous allez copier ce dossier sur la clé USB du professeur.
Toute connexion à la messagerie électronique est strictement interdite pendant l'examen.

Considérons le problème de la propagation de la chaleur dans un domaine 1D. $x \in [0,L]$. La température $T : [0,L] \to \mathbb{R}$, $x \to T(x)$, vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -T''(x) + k(x)\,T'(x) = g(x), \quad 0 < x < L \\ T(0) = \alpha, \quad T(L) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

avec $k : [0,L] \to \mathbb{R}^+$ et $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles données. On prend $L = 1$ et :

$$\begin{cases} k(x) = (1-x), & x \in]0,1[\\ g(x) = (x+2)(1+x^2)\,e^x, & x \in]0,1[\\ \alpha = 1, \quad \beta = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Pour ce cas particulier, la solution exacte est :

$$T_{exact}(x) = (1-x^2)\,e^x. \tag{3}$$

Pour résoudre cette équation, considérons la discrétisation du domaine de définition **avec** $(N+2)$ **points** :

$$[0,L] = \bigcup_{i=0}^{N} [x_i, x_{i+1}],\ x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,(N+1),\ h = L/(N+1), \tag{4}$$

Exercice 1, à rendre sur papier (4 points)

Ecrire la forme discrète de l'équation (1) en utilisant les schémas aux différences finies suivants :

$$T_i'' \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}, \quad T_i' \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}. \tag{5}$$

• En observant que les inconnues du problème sont les valeurs $T_1, T_2, \ldots, T_N$ écrire la forme matricielle du système linéaire final (de dimension N) : $A \cdot T = Q$ qui permettra de calculer le vecteur $T = (T_i)_{1 \le i \le N}$.

• Indiquer (sans démonstration) l'ordre du schéma d'approximation ?

Indication : on écrit l'équation (1) pour $x = x_i$, $i = 1,2,\ldots,N$, et on utilise les schémas aux différences finies (5). On va prendre en compte le fait que, pour les points fictifs $i = 0$ et $i = N$ on a :

$$T_0 = \alpha, \quad T_{N+1} = \beta, \quad \text{(conditions aux limites) et}$$

$$g_0 = g(x)|_{x=0}, \quad g_{N+1} = g(x)|_{x=L}$$

Exercice 2 (8 points) Résolution numérique de l'équation

→ **(A)** (fichier de fonctions **votreNOM_func_ex2.sci**)

(a) (1 pts) Ecrire les fonctions Scilab correspondant aux formules (2) et (3).

→**(B)** (fichier programme principal **votreNOM_test_ex2.sci**)

Définir les paramètres $N = 20, \alpha = 1, \beta = 0$.
(b) (1 pts) Construire le vecteur X de dimension N contenant les abscisses des points discrets $x_1, \ldots, x_N$.

(c) (1 pts) Construire le vecteur Tex de dimension N qui contient les valeurs de la solution exacte (3) pour les points de discrétisation $x_1, \ldots, x_N$. Représenter graphiquement $Tex(X)$.

(d) (1 pts) Construire les vecteurs $K = (k_i)$ et $G = (g_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

(e) (2 pts) Construire la matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et le second membre $Q \in \mathbb{R}^N$ du système linéaire final (cf. Exercice 1).

(f) (2 pts) Résoudre le système linéaire en utilisant une méthode disponible sous Scilab et trouver la solution T (vecteur de dimension N).
Comparer graphiquement avec la solution exacte tracée au point (c).

Exercice 3 (8 points) Ordre de la méthode

Calculer l'erreur $\varepsilon = ||T - T_{exact}||_\infty$ pour les valeurs $N = 20, 40, \ldots, 200$.

Montrer que ε varie comme h^2 en traçant les courbes : $\log(\varepsilon)$ en fonction de $\log(h)$ et $\log(h^2)$ en fonction de $\log(h)$. Vous pouvez utiliser la fonction `plot2d` pour tracer ε en fonction de h en utilisant les coordonnées logarithmiques pour les axes.

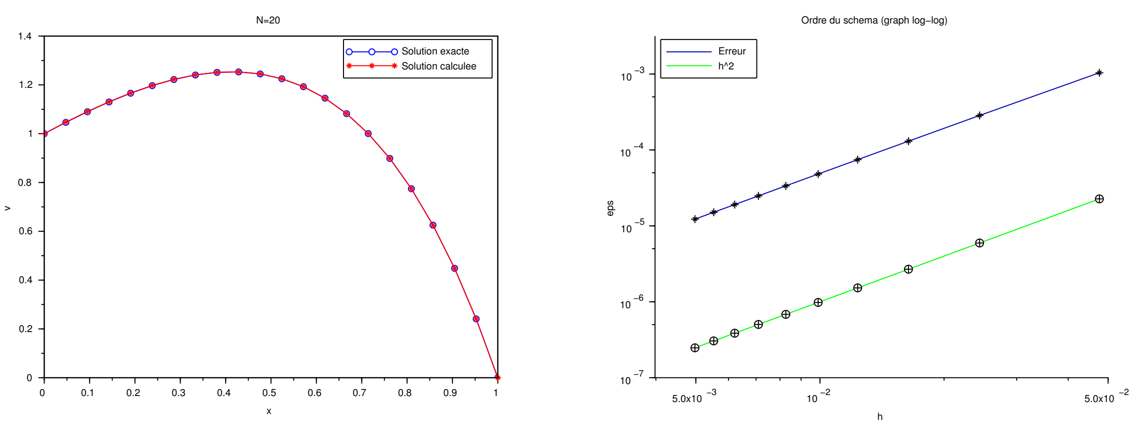

FIGURE 1 – Les graphiques qu'il faut obtenir.