Université de Rouen
L3 Math et MathEco
2016–2017

Calcul scientifique

Examen du 17 mai 2017. Durée 1h30.

À la fin de l'examen un dossier de vos fichiers, portant votre nom et prénom, sera copié sur la clé USB du professeur. Toute connexion à la messagerie électronique est strictement interdite pendant l'examen.

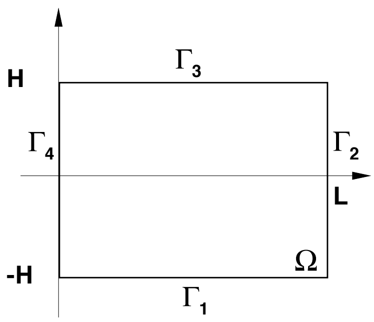
Exercice I.

1. Calculer numériquement avec FreeFem++ l'aire d'une couronne elliptique de demi-axes $a = 2, b = 3$ et $a' = 4, b' = 8$. Comparer avec la valeur exacte.

2. Étudier l'influence du maillage sur le résultat obtenu.

Exercice II.

Considérons une ailette de refroidissement de forme rectangulaire $\Omega = [0, L] \times [-H, H]$.



À l'extrémité Γ_4 l'ailette est en contact avec une source de chaleur de température T_c constante. L'évolution de la température dans l'ailette est la solution de l'EDP :

$$(P) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \Delta \theta = 0, \qquad \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega, \quad 0 \le t \le t_{max}.$$

La variable $\theta(x,t) = (T - T_a)/T_a$ est la température adimensionnée par rapport à la température ambiante T_a (attention, températures en kelvins).

- La condition initiale est : $\theta(x, 0) = \theta_0 = 0$.
- Les conditions aux limites sont imposées ($\forall t > 0$) comme suit :

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_4 & \theta = \theta_c & \text{température imposée (cond. de Dirichlet)} \\ \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 & \partial\theta/\partial n + \alpha\theta = 0 & \text{pertes par convection (cond. de Fourier)} \end{cases}$$

Pour la résolution numérique, on approche la température dans l'ailette par un schéma d'éléments finis P^1 en espace et en temps par un schéma implicite d'Euler.

$$[0, t_{max}] = \bigcup_{n=0}^{N-2} [t_n, t_n + \delta t], \; t_n = n\delta t, \; n = 0, 1, \dots, N-1, \; \delta t = T/(N-1). \tag{1}$$

On note par $\theta^n(x) = \theta(x, t_n)$.

1. Ecrire la formulation variationnelle correspondante pour *le schéma implicite* :

$$\frac{\theta^{n+1}(x) - \theta^n(x)}{\delta t} - \mu \Delta \theta^{n+1}(x) = 0$$

2. Résoudre le problème avec FreeFem++ **(programme.edp)**. Tracer la distribution de température T (en ^oC) pour chaque pas de temps et à t_{max}

Données numériques : $L = 1, H = 0.25, T_a = 20^oC, T_c = 46^oC, \alpha = 10, t_{max} = 0.5, \delta t = 0.01, \mu = 1.$

Attention, utiliser pour la programmation deux variables $u \equiv \theta^{n+1}$ et $uold \equiv \theta^n$.

3. Comparer la solution obtenue à $t = t_{max}$ avec la solution stationnaire (à l'équilibre) obtenue en résolvant l'EDP $-\Delta\theta = 0$, avec les mêmes conditions aux limites. Commenter.