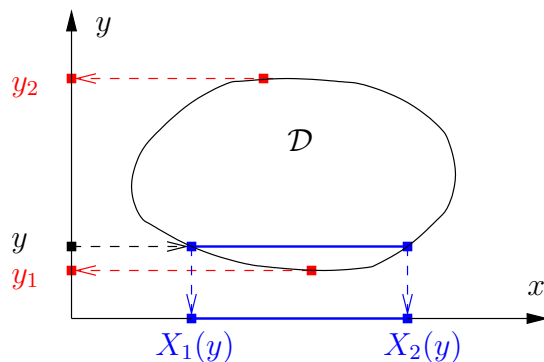


Examen du 12 mai 2016. Durée 1h30.

À la fin de l'examen vos fichiers seront copiés sur la clé USB du professeur. Toute connexion à la messagerie électronique est strictement interdite pendant l'examen. Les notes de cours et de TP ne sont pas autorisées.

Exercice 1 Considérons $f(x, y)$ définie sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$. On peut intégrer f d'abord par rapport à x , puis par rapport à y .



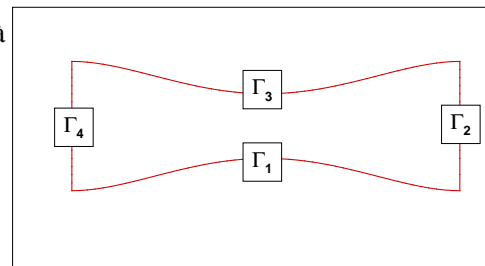
$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

- Calculer avec FreeFem++ $\int_{\Omega} xy$, avec Ω le triangle défini par les points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$.
- Calculer analytiquement cette intégrale et comparer avec la valeur trouvée numériquement.
- Étudier l'influence du maillage sur le résultat obtenu.
- Calculer numériquement avec FreeFem++ l'aire d'une couronne de rayons $r = 3$ et $R = 6$.

Exercice 2 Considérons l'écoulement plan, stationnaire d'un fluide parfait sans viscosité, dans une tuyère.

La vitesse d'une particule située en un point (x, y) est dérivée à partir de la fonction de courant ψ

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \psi \text{ solution de : } -\Delta \psi = 0.$$



- Construire le maillage de la tuyère, défini par $x \in [-a, a]$, et les frontières Γ_3 , respectivement Γ_1 par les équations :

$$y = 1 + b \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right), \quad x \in [-a, a].$$

$$y = -1 - b \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right), \quad x \in [-a, a].$$

- b.** On impose les conditions aux limites suivantes :
- On suppose qu'à l'entrée de la tuyère le courant fluide est uniforme, c'est-à-dire $\psi = y$ sur Γ_4 .
 - En sachant que $\psi = C_1$ sur Γ_1 et $\psi = C_3$ sur Γ_3 , déterminer les valeurs de C_1 et C_3 pour assurer la compatibilité avec la condition sur Γ_4 et, donc, la continuité de ψ sur la frontière ;
 - Sur Γ_2 on considère $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$.
- Calculer et tracer avec FreeFem++ la solution ψ de ce problème. Les données numériques sont : $a = 6, b = 1$.
- c.** Calculer les deux composantes de la vitesse et tracer les vecteurs vitesse.
- d.** Écrire une "macro" pour visualiser la solution $\psi(x, y)$ **en 3D avec Gnuplot.**