Université de Rouen Normandie
L3, Maths & Maths-Eco

Analyse numérique

Rattrapage du 3 juillet 2018. Durée 2 heures.

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours, de TD et de TP ne sont pas autorisées.*

Exercice I

Soient A, M et N des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = M - N$ et M inversible.

1. Montrer que λ est une valeur propre de $M^{-1}N$ si et seulement si λ est racine du polynôme $P(x) = \det(x\,M - N)$.

On considère le système linéaire $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire la matrice d'itération $\mathcal{L}_1$ de Gauss-Seidel. Calculer le rayon spectral de $\mathcal{L}_1$. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ? Celle de Jacobi est-elle convergente ? Pourquoi ?

3. On pose $\tilde{A} = PA$ où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\tilde{A}$ est à diagonale strictement dominante.

4. Montrer que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel associées à $\tilde{A}$ convergent.

5. Vérifier que les systèmes $AX = b$ et $\tilde{A}X = b$ sont équivalents. Écrire les deux premières itérations de Jacobi approchant X, en prenant comme vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice II

Soit la matrice tridiagonale $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A_2 est une matrice symétrique, définie positive (rappeler la définition).

2. Montrer que A_n est une matrice symétrique, définie positive.

3. Calculer la factorisation LU de la matrice A_4. Généraliser pour A_n.

4. Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_4. Généraliser pour A_n. On admet pour la suite que les valeurs propres de A_n sont

$$\lambda_k = 2\left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right], \quad k = 1, \dots, n$$

5. Calculer le rayon spectral $\rho(A_n)$.

6. Calculer le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A_n)$. Montrer que pour n grand, on peut approcher

$$\mathrm{cond}_2(A_n) \approx \frac{4(n+1)^2}{\pi^2}$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{cond}_2(A_n)$.

Exercice III

Soit $f(x) = 2\sin(3x)$. Soient $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_1 f$ de f aux nœuds x_0 et x_1.

2. On pose $E_1(x) = f(x) - \Pi_1 f(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ lorsque $x \in [x_0, x_1]$.

3. Donner une approximation de $\sqrt{2}$ et de $\sin(3)$

4. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_2 f$ de f aux nœuds x_0, x_1 et x_2.

5. Donner une estimation de l'erreur $E_2(x) = f(x) - \Pi_2 f(x)$.

6. Donner une approximation de $\sqrt{2}$ et de $\sin(3)$. Commenter les résultats obtenus.