Université de Rouen Normandie — Analyse numérique

L3, Maths & Maths-Eco

**Examen du 16 janvier 2018. Durée 2 heures.**

- **On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.**
- **Les notes de cours, de TD et de TP ne sont pas autorisées.**

---

**Exercice 1.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit l'opérateur *trace* par :

$$\mathrm{tr(A)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_{ii}}.$$

**a.** Montrer que

$$\mathrm{tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \quad tr(AB) = tr(BA).}$$

**b.** Si $A$ et $B$ sont semblables (rappeler la définition), montrer que

$$\det(A) = \det(B), \quad \mathrm{tr(A) = tr(B)}, \quad \mathrm{p_A}(\lambda) = \mathrm{p_B}(\lambda),$$

avec $p_A$ et $p_B$ les polynômes caractéristiques associés à $A$ et $B$ respectivement.

**c.** Montrer que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \mathrm{tr(A)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{i}},$$

avec $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ les valeurs propres de $A$ (Indication : A est triangularisable !).

---

**Exercice 2.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante vérifiant, pour $\delta > 0$ donné,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \delta, \qquad \forall 1 \leq i \leq n, \tag{1}$$

**a.** Montrer que $A$ est inversible.

**b.** Montrer que $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/\delta$.

**c.** Soit $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ une matrice donnée par

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & i \\ -i & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $B$ est à diagonale strictement dominante. Expliciter $\delta$.

**d.** Montrer que

$$\mathrm{Cond}_\infty(B) \leq 4.$$

**Exercice 3.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive. Pour résoudre un système linéaire associé à $A$ par la méthode itérative dite de Richardson, on utilise la décomposition régulière suivante :

$$A = M - N, \quad \text{avec } M = \frac{1}{\alpha} I, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

**a.** Montrer que les valeurs propres de $A$ sont réelles et strictement positives. En déduire que $A$ est inversible.

**b.** On note $R = M^{-1}N$ la matrice d'itérations de cette méthode. Si l'on désigne par $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A$, montrer que le rayon spectral de $R$, $\rho(R)$, est donné par

$$\rho(R) = \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \alpha \lambda_i|.$$

**c.** Montrer que la méthode de Richardson converge si :

$$0 < \alpha < \frac{2}{\rho(A)},$$

où $\rho(A)$ est le rayon spectral de $A$.

---

**Exercice 4.** Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1])$ et l'on pose $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(1)$.

**a.** En utilisant la table des différences divisées, montrer que le polynôme $P_\varepsilon$ défini par :

$$P_\varepsilon(x) = \alpha + \frac{1}{\varepsilon}(f(\varepsilon) - f(0))x + \Big(\frac{\beta - \alpha}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{1 - \varepsilon}\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon}\Big)x(x - \varepsilon),$$

est le polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant $f$ aux points $0, \varepsilon$ et $1$.

**b.** Montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} P_\varepsilon(x) = P(x),$$

avec $P(x) = (\beta - \alpha - f'(0))x^2 + f'(0)x + \alpha$.

**c.** Vérifier que $P$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$$P(0) = \alpha, P'(0) = f'(0), \quad \text{et } P(1) = \beta.$$

**d.** **Application :** Soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

i. Calculer le polynôme d'interpolation $P$ interpolant $f$.

ii. En déduire une approximation de $\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \sin(\frac{\sqrt{2}}{2})$ sachant que $\sqrt{2}/\pi \simeq 0,45$.