Université de Rouen
L3-Mathématiques
Analyse numérique

Contrôle continu du 23 novembre 2012. Corrigé.

Partie I

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & -1 & 3 & -1 \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

où n et h satisfont la relation $nh = 1$.

a) $\|A\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|) = \frac{5}{h}$.

b) $B = \dfrac{h}{3}A - I$ c'est-à-dire

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

et sa norme $\|B\|_\infty = \frac{2}{3}$.

c) Soit $\|.\|$ une norme subordonnée.

i) $\|I\| = \sup \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} = 1$.

ii) Supposons $(I+M)$ non inversible. Soit alors $v \neq 0$ dans $\ker(I+M) \neq \{0\}$ ou encore $v = -Mv$. Cela implique $\|v\| = \|Mv\| \leq \|M\|\|v\|$. Il en découle $\|M\| \geq 1$, et ceci contredit l'hypothèse $\|M\| < 1$. On conclut donc que $(I+M)$ est inversible. En utilisant $(I+M)^{-1} = I - M(I+M)^{-1}$, on a

$$\|(I+M)^{-1}\| \leq \|I\| + \|M\|\|(I+M)^{-1}\| \text{ ou encore } (1-\|M\|)\|(I+M)^{-1}\| \leq 1.$$

d) On en déduit $\|A^{-1}\|_\infty = h/3\|(B+I)^{-1}\|_\infty \leq h/3\frac{1}{1-\|B\|_\infty} = h$ (puisque $\|B\|_\infty < 1$).

e) On en déduit une majoration du $cond_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty \leq 5$.

f) Le comportement de ce conditionnement est indépendant de h.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante.

a) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|A_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ii}| \geq \alpha.$$

On en dduit que $|A_{ii}| > 0$ ou encore que $A_{ii} \neq 0$.

b) La matrice de Jacobi est $J = D^{-1}(E+F)$ où

$$D = diag(A_{11}, \ldots, A_{nn}) \text{ et } E+F = D-A.$$

On a

$$\|J\|_\infty = \|D^{-1}(E+F)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}(\sum_{j=1}^{n} |J_{ij}|) = \max_{1\leq j\leq n} \frac{1}{|A_{ii}|}(\sum_{j\neq i} |A_{ij}|).$$

c) La méthode de Jacobi est convergente car $\|J\|_\infty < 1$.

d) La matrice A est symétrique, à diagonale strictement dominante. Elle est aussi tridiagonale. Alors les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi sont convergentes et $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$. La méthode de Gauss-Seidel est alors plus performante.

Partie II

Exercice 3.

a) On trouve, voir feuille du TD1

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) D'aprs la premire question, on a

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2}u_1 \\ a_2 &= 2u_2 - \sqrt{2}u_1 \\ a_3 &= \sqrt{2}u_3 + \sqrt{2}u_1 - u_2, \end{cases}$$

on en dduit que la matrice R est triangulaire suprieure

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer le produit $Q^{-1}A = Q^T A$ et l'identifier avec R.

c) Pour rsoudre le systme $Ax = b$, on rsout deux systmes plus simples
– $Qy = b$, dont la solution est $y = Q^{-1}b = Q^T b$
– $Rx = y$ dont la solution s'obtient par remonte.
Pour $b = (-3, 1, 5)^T$, on trouve $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-4, -5\sqrt{2}, -2)^T$, puis $x = (-4, -3, -1)^T$.

Exercice 4.

a) La plus petite valeur propre de A est gale $a - 2\cos[\pi/(N+1)]$. Si $a \geq 2$, la matrice A est dfinie positive et admet donc une dcomposition de Cholesky. Si $a \in]0, 2[$, partir d'un certain rang N_0, on a pour tout $N \geq N_0$, $a - 2\cos[\pi/(N+1)] \leq 0$ et la matrice A n'est plus dfinie positive et peut être même pas inversible. On suppose donc que $a \geq 2$.

b) Comme la factorisation de Cholesky conserve la structure bande des matrices, on cherchera la matrice de Cholesky B sous la forme

$$B = (B_{i,j})_{i,j}, \text{ avec } B_{i,j} = 0 \text{ si } j \notin \{i-1, i\}.$$

– La premire ligne de l'galit $A = BB^T$, s'crit $B_{1,1}^2 = a$, on en dduit que $B_{1,1} = \sqrt{a}$,
– La ligne $i(>1)$ de l'galit $A = BB^T$, s'crit

$$\begin{cases} B_{i,i-1}B_{i-1,i-1} &= 1 \\ B_{i,i-1}^2 + B_{i,i}^2 &= a \\ B_{i,i}B_{i+1,i} &= 1 \end{cases}$$

On en dduit un algorithme itratif pour calculer la matrice B
– $B_{1,1} = \sqrt{a}$
– Pour $i = 2, \ldots, N$

$$\begin{cases} B_{i,i-1} &= 1/B_{i-1,i-1} \\ B_{i,i} &= \sqrt{a - \dfrac{1}{B_{i-1,i-1}^2}} \end{cases}$$

Exercice 5. Puisque la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est définie positive, on a $a > 0, c > 0$ et $ac - b^2 > 0$. La matrice de la méthode de Jacobi associée à A est

$$\mathcal{J} = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -b/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\mathcal{J}$ sont $\pm|b|/\sqrt{ac}$, on en déduit que $\rho(\mathcal{J}) < 1$ et la méthode de Jacobi converge.
