Université de Rouen
L3-Mathématiques
Analyse numérique

Contrôle continu du 23 novembre 2012. Durée 2 heures.

Documents autorisés. Les appareils électroniques sont interdits.

Résoudre chaque partie sur une feuille séparée.
On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.
Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront clairement être énoncés.

Partie I

Exercice 1. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & -1 & 3 & -1 \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

où n et h satisfont la relation $nh = 1$.

a) Calculer $\|A\|_\infty$.

b) On pose $A = \dfrac{3}{h}(I+B)$, où I est la matrice identité. Donner B et calculer sa norme $\|B\|_\infty$.

c) Soit $\|.\|$ une norme subordonnée.

  i) Montrer que $\|I\| = 1$.

  ii) Soit M une matrice carrée. Montrer que si $\|M\| < 1$, alors la matrice $I+M$ est inversible et que

$$\|(I+M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|M\|}.$$

d) En déduire une majoration de $\|A^{-1}\|_\infty$.

e) Donner une majoration du conditionnement de A pour la norme $\|\|_\infty$.

f) Quel est le comportement de ce conditionnement, lorsque h tend vers zéro.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante.

a) Montrer que les coefficients diagonaux de A sont non nuls.

b) Soit J la matrice définissant les itérations de Jacobi appliquée à un système linéaire de matrice A. Exprimer la norme $\|J\|_\infty$ en fonction des coefficients de A.

c) En déduire que la méthode de Jacobi est convergente.

d) Considérons la matrice A de l'exercice précédent. Montrer, sans faire de calcul, que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi appliquées à un système linéaire de matrice A sont convergentes. Quelle méthode choisiriez-vous pour résoudre un tel système ?

Partie II

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées des vecteurs

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On se propose de résoudre le système linéaire

$$Ax = b \tag{1}$$

de la manière suivante :

a) Construire à partir des vecteurs a_1, a_2 et a_3 une base orthonormée u_1, u_2 et u_3 (par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

b) Est-ce que la matrice A est inversible ?

c) Soit Q la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs u_1, u_2 et u_3.
Déterminer la matrice R telle que

$$A = QR. \tag{2}$$

d) Expliquer pourquoi la factorisation (2) permet de résoudre simplement le problème de départ (1) Utiliser la factorisation (2) pour résoudre le système (1) avec $b = (-3, 1, 5)^T$.

Exercice 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définie par

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}$$

où a est un réel strictement positif. On sait que les vecteurs propres de la matrice sont :

$$\lambda_k = a + 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, \ldots, n$$

a) Pour quelles valeurs de a la matrice M admet une décomposition de Cholesky ?

b) Dans le cas où la factorisation de Cholesky $M = BB^T$ est possible, en déduire les formules permettant de calculer les coefficients de B. Ecrire (en pseudo-langage) cet algorithme itératif.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la matrice A converge.
