Exercice 1. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ et

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_1E_2, E_2E_1, E_1A et AE_1.

Exercice 2. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(a) Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

(b) Factoriser la matrice A du système en produit LU où L est une matrice triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale) et U triangulaire supérieure, puis résoudre ce système.

Exercice 3. Résoudre par Gauss direct, puis par factorisation LU de la matrice le système :

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Soit le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Factoriser la matrice A en produit LU puis résoudre le système.

Exercice 5. Soit le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Factoriser la matrice A en produit LU puis résoudre le système.

(b) Trouver A^{-1} (on rappelle que si M et N sont deux matrices carrées inversibles, alors $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

Exercice 6. Méthode de Gauss–Jordan

La méthode de Gauss–Jordan consiste pour résoudre un système linéaire à éliminer, à chaque étape k, les termes en x_k des lignes l_i pour $i \geq k+1$ (comme dans la méthode de Gauss) et des lignes l_i pour $1 \leq i \leq k-1$. On suppose que tout se passe bien. On aboutit alors à un système diagonale (facile à résoudre).

(a) Compter le nombre de multiplications–divisions requises pour la résolution du système $Ax = b$ par la méthode de Gauss–Jordan. On compte

$$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2} \text{ multiplications–divisions}$$

(b) Comparer ce résultat avec la méthode de Gauss qui compte

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \text{ multiplications–divisions}$$

Exercice 7. Décomposer par la méthode LU (si c'est possible) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice A et résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 & 12 \\ -3 & 26 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 12 & -14 & -2 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -27 \\ -51 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soit A une matrice (pleine) définie positive.

(a) On effectue sa factorisation de Cholesky, $A = BB^t$ où B est une matrice réelle triangulaire inférieure. Reprendre le cours et calculer le nombre d'opérations élémentaires requises pour calculer les coefficients de B. (distinguer multiplications–divisions et extraction de racines)

(b) On résout le système $Au = b$ en résolvant successivement les deux systèmes linéraires $Bw = b$ et $B^t u = w$. Donner le nombre d'opérations nécessaires.

(c) Donner le nombre total d'opérations de la méthode de Cholesky pour résoudre $Au = b$ et comparer avec celui de la méthode de Gauss.

Exercice 10. [Impact numérique sur le choix du pivot]
Soit le système

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

(a) Calculer la solution exacte et donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On suppose que l'on effectue les calculs sur machine avec 3 chiffres significatifs avec arrondi (i.e. $90883 = 9,0883.10^6 \simeq 9,09.10^6$).

(b) Montrer que pour la machine $-10^4 + 1 \simeq -10000$. On choisit 10^{-4} comme pivot. Montrer que le système en machine devient

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ -10000x_2 = -10000 \end{cases}$$

En conclure que le calcul approché donne $x_2 \simeq 1$ et $x_1 \simeq 0$. Est-ce satisfaisant par rapport à la solution exacte ?

(c) On choisit 1 comme pivot. Montrer qu'on aboutit (en machine) au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

d'où les valeurs approchées $x_1 \simeq 1$ et $x_2 \simeq 1$. Est-ce satisfaisant ? Pour éviter les problèmes d'erreur d'arrondi (dûs à des pivots trop petits donc d'inverse trop grands) il est d'usage d'utiliser la méthode du pivot partiel.