Exercice 1.

Appliquer la méthode de la dichotomie pour résoudre $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^2 - 2$. Prendre $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et calculer a_n, b_n pour $n = 0, 1, 2$. Trouver le nombre d'itérations n tel que $|a_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-10}$.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 1.$$

(a) Localiser chaque racine de l'équation $f(x) = 0$ dans un intervalle formé de 2 entiers consécutifs.

(b) Soient les trois méthodes d'approximations successives suivantes,

$$g_1(x) = x^4 - 4x^3 + x - 1$$
$$g_2(x) = \frac{1}{(x-4)^{1/3}}$$
$$g_3(x) = \frac{1}{x^3} + 4.$$

Pour chaque méthode et chaque racine, on montrera, soit la possibilité de converger, soit la divergence de la suite, définie par les méthodes itératives. Dans le cas de convergence, on précisera un choix de valeur initiale en justifiant ce choix.

Exercice 3.

Soient a un réel strictement positif et la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}.$$

Pour un choix convenable du réel x_0 quelle est la limite de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ et l'ordre de convergence ?

Exercice 4. Un cas où $g'(l) = 1$

(a) Soit $g(x) = x - x^3$ qui admet 0 comme point fixe. Calculer $g'(0)$ et montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ alors $g(x) \in]-1, 1[$. Prendre différentes valeurs de x_0 dans l'intervalle $[-1, 1]$ et constater expérimentalement que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers 0. La convergence vous paraît–elle d'ordre 1, rapide ou lente ? Démontrer que pour tout $x_0 \in [-1, 1]$ alors x_n converge vers 0.

(b) On considère maintenant $g(x) = x + x^3$ qui a aussi 0 comme point fixe. Calculer $g'(0)$ et montrer que pour tout choix $x_0 \neq 0$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ la suite diverge.

Exercice 5. Un cas où $|g'(l)| > 1$

On se propose de résoudre l'équation $x = -\ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) À l'aide d'un graphe, constater que la solution est unique. Soit l cette solution.

(b) Montrer que si on pose $g(x) = -\ln(x)$, on a $|g'(l)| > 1$. En déduire que la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n)$ échoue.

(c) Montrer que la fonction réciproque, g^{-1}, de g existe et que $g^{-1} = \exp(-x)$. Montrer que la méthode itérative $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ converge pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$ vers la solution l. Choisir un x_0 (pas trop loin de l), calculer à l'aide de la machine à calculer 5 itérations et en déduire une valeur approchée de l.

Exercice 6.

On désire résoudre l'équation $x^2 = \ln(1 + x)$.

(a) -i- Montrer que la fonction $f(x) = x^2 - \ln(1 + x)$ définie sur $]-1, +\infty[$ admet deux racines, l'une évidente que l'on précisera, l'autre α que l'on veut approcher dans la suite du problème.

-ii- Localiser α dans un intervalle de longueur 1/4 [justifier votre réponse].

(b) On propose dans la suite trois méthodes itératives du type $x_{n+1} = g(x_n)$ pour approcher α.

-i- Méthode (A) :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi,} \\ x_{n+1} = h(x_n) \quad \text{où} \quad h(x) = \sqrt{\ln(1 + x)}. \end{cases}$$

Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$. Cette méthode converge-t-elle vers α ?

-ii- Méthode (B) :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi,} \\ x_{n+1} = k(x_n) \quad \text{où} \quad k(x) = \exp(x^2) - 1. \end{cases}$$

Vérifier que $k(\alpha) = \alpha$. Cette méthode converge-t-elle vers α ?

-iii- Méthode (C) :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi,} \\ x_{n+1} = r(x_n) \quad \text{où} \quad r(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}. \end{cases}$$

Vérifier que $r(\alpha) = \alpha$. Cette méthode converge-t-elle vers α ?

-iv- On décide de choisir $x_0 = 0.7$ et la méthode (C). À l'aide de la calculatrice donner x_1, x_2, x_3 et x_4 avec 4 chiffres après la virgule.

Exercice 7.

Soit $f(x) = x^2 - 2$

(a) Mettre en œuvre l'algorithme de Newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

(b) On pose $x_0 = 2$, calculer x_1, x_2, x_3. Représenter la courbe de f ainsi que les points x_0, x_1 et x_2.

(c) Calculer p tel que
$$|x_p - \sqrt{2}| \leq 10^{-10}, \quad \text{puis}$$
$$|x_p - \sqrt{2}| \leq 10^{-100}.$$

Exercice 8.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ convexe sur $\mathbb{R}$ ($f'' \geq 0$).

(a) Montrer que pour $a \leq b$,
$$f(a) + (b-a)f'(a) \leq f(b) \leq f(a) + (b-a)f'(b).$$

(b) On suppose de plus que f est strictement croissante sur $[s, \infty[$, où s est un zéro de f. Montrer que, pour tout $x \geq s$,
$$(x-s)f'(s) \leq f(x) \leq (x-s)f'(x).$$
En déduire que, pour tout choix de $x_0 \in [s, \infty[$, la méthode de Newton converge.

Exercice 9.

On veut approcher une racine multiple r d'une fonction f ayant le développement limité suivant au voisinage de r,
$$f(x) = (x-r)^p + (x-r)^{p+1} + o(x-r)^{p+1}.$$
On suppose de plus que f' a pour développement limité au voisinage de r,
$$f'(x) = p(x-r)^{p-1} + (p+1)(x-r)^p + o(x-r)^p.$$
On utilise la méthode de Newton :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
et on pose
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r.

(a) Montrer que, dans un voisinage de r
$$\varphi(x) = r + \frac{p-1}{p}(x-r) + \frac{1}{p^2}(x-r)^2 + o(x-r)^2$$

(b) Soit $e_n = x_n - r$, montrer que
$$e_{n+1} = \frac{p-1}{p}e_n + \frac{1}{p^2}e_n^2 + o(e_n^2).$$
Commenter la méthode suivant les valeurs de p.

Exercice 10.

Utiliser la méthode de Newton pour résoudre les équations :
$$x^3 = 2, \qquad x^5 = 3, \qquad e^x + x = 0,$$
$$\ln x + x = 0, \qquad \sin x = 1 - 2x.$$
[démontrer l'existence de racine(s), localiser, choisir x_0 tel que la méthode converge, estimer l'erreur, donner les 5 premiers termes de la suite à l'aide de la calculatrice.]

Reprendre l'équation à résoudre de l'exercice 7. Définir la méthode de Newton associée à la fonction f. Donner un choix de x_0 qui assure la convergence [justifier votre réponse par un théorème du cours]. Pour ce choix de x_0, donner à l'aide de la calculatrice x_1, x_2, x_3 et x_4 avec 8 chiffres après la virgule.

Exercice 11.

Soit la fonction f définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{\ln 2}{\pi} \sin\left(2\pi \frac{\ln x}{\ln 2}\right) + 1$$

(a) **Sans réfléchir** appliquer la méthode de Newton avec $x_0 = 1$ et montrer par récurrence que $x_n = 1/2^n$. Quelle est la limite de x_n ?

(b) Réfléchir.

Exercice 12. Racine multiple

Soit p un polynôme. Soit α une racine de multiplicité m de p (i.e. $p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $p^{(m)}(\alpha) \neq 0$). La racine α est donc une racine multiple dès que $m \geq 2$. On définit alors la méthode de Newton modifiée par
$$\begin{cases} x_0 \text{ donné proche de } \alpha, \\ x_{n+1} = x_n - m\dfrac{p(x_n)}{p'(x_n)}. \end{cases}$$
Montrer que cette méthode converge de façon quadratique (i.e. ordre de convergence égal à 2) vers α si x_0 est suffisamment proche de α. [indication : traduire correctement le fait que α est racine multiple de p]