Université de Rouen
L3-Mathématiques
Analyse numérique

Examen du 16 janvier 2013. Durée 3 heures.

Documents autorisés (notes de cours/TD).
Les appareils électroniques sont interdits.

> ***Résoudre chaque partie sur une feuille séparée.***
> *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.*
> *Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront clairement être énoncés.*

Exercice 1. (9 pts) Dans la suite, on note par $< u,v >$ le produit scalaire euclidien, et la norme associée par $\|u\| = \sqrt{< u,u >}$. À tout vecteur colonne non nul $u \in \mathbb{R}^n$, on associe la matrice $H(u)$ définie par :

$$H(u) = I - 2\frac{u \cdot u^T}{\|u\|^2}.$$

On note $\mathcal{U} = \{\alpha u, \alpha \in \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel engendré par le vecteur u et $\mathcal{U}^\perp$ l'hyperplan engendré par les vecteurs orthogonaux à u :

$$\mathcal{U}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n,\ < u,v >= 0\}$$

a) **(0,5 pt)** Montrer que pour tous vecteurs u et w, on a $(u \cdot u^T)w =< u,w > u$.

b) **(1 pt)** Montrer que pour tout $w \in \mathcal{U}$, on a $H(u)w = -w$.

c) **(1 pt)** Montrer que pour tout $w \in \mathcal{U}^\perp$, on a $H(u)w = w$.

d) **(0,5 pt)** Quelle est la transformation géométrique associée à la matrice $H(u)$?

e) **(2 pts)** Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs donnés non nuls, (avec $\|b\| = 1$). On définit successivement les vecteurs $v = a - \|a\|\, b$ puis $u = v/\sqrt{2 < a,v >}$. Vérifier que

$$H(u)a = \|a\|\, b.$$

f) **(1 pt)** Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, décrire de maniére succinte l'idée d'un algorithme de triangularisation de la matrice A, puis un algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$.

g) **(3 pts)** Utiliser les algorithmes précédents pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice définie positive de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la matrice A converge.

Exercice 3. (4 pts) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
Considérons maintenant $(n+1)$ points équidistants de $[a,b]$, d'abscisses $x_i = a+ih, i = 0,1,\dots,n$, avec le paramétre de discrétisation $h = (b-a)/n$. Les valeurs de u aux points x_i, notées $u_i = u(x_i)$, sont supposées connues.
Soit la formule générale :

$$\frac{1}{3}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{3}u'_{i+1} - a\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} - b\frac{u_{i+2}-u_{i-2}}{4h} + R = 0.$$

Trouver les valeurs des coefficients a et b pour que l'erreur de troncature R contienne des termes de l'ordre de h^p, $p \geq 6$. En déduire le schéma aux différences finies correspondant. Préciser s'il est explicite ou implicite.

Exercice 4. (5 pts)

a) **(1,5 pts)** Soit la formule de quadrature élémentaire sur $[0,1]$

$$I(f) = \frac{1}{4}\big(f(0) + 3f(\frac{2}{3})\big)$$

qui permet d'approcher $\int_0^1 f(x)\,dx \sim I(f)$. Trouver l'ordre de la méthode (cf. définition).

b) **(1,5 pts)** Ecrire la formule de quadrature pour approcher $\int_{t_0}^{t_0+h} f(t)dt$, avec $t_0 > 0$ un réel positif.

c) **(2 pts)** On veut résoudre l'équation différentielle (EDO) $y' = f(t,y)$, où $f(t,y)$ est une fonction définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, lipschitzienne par rapport à y uniformément en t.
En appliquant la question précédente à la fonction $y'(t)$, trouver un schéma pour résoudre numériquement cette EDO.
Indication : $f(t,y)$ est connue et on va trouver la relation qui permet de calculer $y(t_0+h)$ à partir de $y(t_0)$ (avancer la solution d'un pas de temps h).

Exercice 5. (? pts)

a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ une matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+\varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que A admet une factorisation LU.

c) Calculer les matrices L et U en utilisant l'algorithme d'éliminationd e Gauss.

d) En déduire l'inverse de A en résolvant les systèmes linéaires $Ax = e_i$, $i = 1,2,3$, où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

e) Calculer le conditionnement, $cond_\infty(A)$, de A.

f) Soit $b \in Im(A)$. Que peut-on conclure quant à la précision obtenue sur la solution de $Ax = b$ quand ε tend vers zéro ? Ce résultat est-il surprenant ?
