Université de Rouen Normandie — Analyse numérique

L3, Maths & Maths-Eco

Contrôle du 8 Janvier 2020. Durée 2 heures.

- *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
- *Les notes de cours, de TD et de TP ne sont pas autorisées.*
- *Les appareils électroniques sont interdits.*

Exercice I. (6pts) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante vérifiant, pour $\delta > 0$ donné,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \delta, \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

1. (1pt) Montrer que A est inversible.

2. (1pt) Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la résolution du système $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$ converge.

3. (1pt) On considère le système linéaire $Bx = b$ avec

$$B = \begin{pmatrix} -i & 7 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ une matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $A = PB$. Vérifier que A est à diagonale strictement dominante. Expliciter δ.

4. (1pt) Montrer que les systèmes $Bx = b$ et $Ax = b$ sont équivalents.

5. (2pts) On désigne par $\tilde{x}$ la solution du système $B\tilde{x} = b + 10^{-3}b$.
Si l'on admet que $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/\delta$, montrer que

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4 \cdot 10^{-3}.$$

Exercice II. (6pts) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche à approcher la solution du système linéaire

$$Ax = b, \qquad (\mathcal{S})$$

par la méthode itérative de Jacobi. On note J la matrice d'itération de Jacobi.

1. **(1pt)** Montrer qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $J^p = 0$.
2. **(1pt)** Montrer que $x^{(k+1)} - x = J(x^{(k)} - x)$.
3. **(1pt)** En déduire le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode de Jacobi. Commenter.
4. **(1pt)** Comment généraliseriez-vous ce résultat ?
5. **(2pts)** On pose $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$. Calculer tous les termes de la suite $(x^{(k)})$ permettant de résoudre $(\mathcal{S})$.

Exercice III. (3pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1. **(1pt)** Calculer la factorisation LU de A.
2. **(1pt)** Utiliser cette factorisation pour calculer la matrice inverse de A (on pourra résoudre trois systèmes linéaires).
3. **(1pt)** Quel est l'avantage de la factorisation LU pour résoudre un système linéaire par rapport à la méthode de Gauss ?

Exercice IV. (5 pts) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Considérons $(n + 1)$ points équidistants de $[a, b]$, d'abscisses $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n$, avec le paramètre de discrétisation $h = (b - a)/n$. Les points x_i forment la grille (ou maillage) d'approximation.
Les valeurs de f aux points x_i, notées $f_i := f(x_i)$, sont supposées connues. On note également $f_i^{'} := f^{'}(x_i)$, les valeurs discrètes de la dérivée première, que l'on cherche à calculer.

1. **(2 pts)** Écrire les développements de Taylor de $f_{i\pm1}$ et de $f_{i\pm2}$ au voisinage de x_i. En déduire les développements de
$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad \text{et} \quad \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h}.$$
2. **(1 pt)** Écrire les développements de Taylor de $f_{i\pm1}^{'}$ au voisinage de x_i.
3. **(2 pts)** Soit la formule générale $(2 \leq i \leq n - 2)$:
$$\frac{1}{3} f_{i-1}^{'} + f_i^{'} + \frac{1}{3} f_{i+1}^{'} - a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} = R(h^p, f'', f^{(3)}, \ldots).$$
Utiliser les développements de Taylor précédents pour trouver l'expression de R.
Calculer les coefficients a et b pour que l'erreur de troncature R contienne des termes $\sim h^p$, avec $p \geq 6$. En déduire le schéma d'approximation aux différences finies qui permet de calculer les valeurs $f_i^{'}$ de la dérivée première.