Université de Rouen Normandie
Master 1, MFA & MAM

Analyse numérique des EDP
A. Blouza

## Contrôle continu du 23 octobre 2019. Durée 2 heures.

---

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.*

---

### Problème I.

On veut résoudre le problème : Trouver $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + \dfrac{u'(x)}{1+x} = f(x), \quad x \in ]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On admet que ce problème admet une et une seule solution $u$ et on suppose que $u \in \mathcal{C}^4(]0,1[)$.
On cherche une solution approchée de (1) par la méthode des différences finies.
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$. On note $u_i$ la valeur approchée recherchée de $u$ au point $ih$, pour $i = 0, \ldots, N+1$. On utilise les approximations centrées les plus simples de $u''$ et $u'$ aux points $ih$, $i = 1, \ldots, N$. On pose $u_h = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^t$.

**1.** Montrer que $u_h$ est solution d'un système linéaire de la forme $A_h u_h = b_h$ ; donner $A_h$ et $b_h$.

**2.** Montrer que le schéma numérique obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance.

**3.** Montrer que la matrice $A_h$ conserve la positivité. En déduire que $A_h$ est monotone.

**4.** On considère la fonction $\theta$ sur $[0,1]$ définie par

$$\theta(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \ln 2$$

**i.** Montrer que $\theta$ est solution d'un problème aux limites de même type que (1).

**ii.** On définit le vecteur $\theta_h$ de composantes $\theta(ih)$, $i = 1, \ldots, N$. Montrer qu'il existe une constante $C$ indépendante de $h$ telle que :

$$\max_{1 \leq i \leq N} |(A_h \theta_h)_i - 1| \leq Ch^2,$$

**iii.** Montrer que

$$(A_h \theta_h)_i \geq 1 - Ch^2, \quad 1 \leq i \leq N.$$

**iv.** Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante $M$ indépendante de $h$ telle que :

$$||A_h^{-1}||_\infty \leq M.$$

**5.** En précisant les hypothèses sur $u$ solution de (1), montrer la convergence de $u_h$ vers $u$.

**6.** Que peut-on dire si $u \notin \mathcal{C}^4$, mais seulement $u \in \mathcal{C}^3$ ou $u \in \mathcal{C}^2$ ?

**Problème II.**

Soit $\Omega = ]0,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$. On se propose d'étudier un schémas numériques pour le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= f(x,y), (x,y) \in \Omega, & (2)\\ u(x,y) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. & (3) \end{aligned}$$

où $k > 0$ est un reél donné et $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ est donnée. On note $u$ la solution exacte de (2)-(3) et on suppose que $u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega})$.

**1.** Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ telle que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\, dxdy + \int_\Omega k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy = \int_\Omega f(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy.$$

En déduire que si $f \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$, on a alors $u \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on pose $h = 1/(N+1)$ , et $u_{i,j}$ est la valeur approchée recherchée de $u(ih, jh)$, $(i,j) \in \{0, \ldots, N+1\}^2$. On pose $f_{i,j} = f(ih, jh)$, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2$.
On s'intéresse au schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{aligned} a_0 u_{i,j} - a_1 u_{i-1,j} - a_2 u_{i+1,j} - a_3 u_{i,j-1} - a_4 u_{i,j+1} &= f_{i,j}, \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2, & (4)\\ u_{i,j} &= 0, (i,j) \in \gamma. & (5) \end{aligned}$$

où $\gamma = \{(i,j), (ih, jh) \in \partial\Omega\}$ et $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ sont données par :

$$a_0 = \frac{4}{h^2} + \frac{k}{h},\ a_1 = \frac{1}{h^2} + \frac{k}{h},\ a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{h^2}.$$

**2.** Donner une majoration de l'erreur de consistance en fonction de k, h et des dérivées de $u$, pour le schéma (4)-(5). Donner son ordre de consistance.

**3.** Montrer que si $(w_{i,j})$ vérifie :

$$a_0 w_{i,j} - a_1 w_{i-1,j} - a_2 w_{i+1,j} - a_3 w_{i,j-1} - a_4 w_{i,j+1} \leq 0, \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2,$$

on a alors

$$w_{i,j} \leq \max_{(n,m)\in\gamma} (w_{n,m}), \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2.$$

**4.** Montrer que le schéma (4)-(5), sous la condition trouvée à la question 3., est stable c'est-à-dire $\|U\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, avec une constante $C$ à déterminer explicitement et où

$$U = \left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{0,\ldots,N+1\}^2}$$

est solution de (4)-(5).
En déduire, sous la condition trouvée en 3, que le problème (4)-(5) admet, pour tout $f$, une et une seule solution.

**5.** Montrer que,

$$\max_{(i,j)\in\{0,\ldots,N+1\}^2} (|u_{i,j} - u(ih, jh)|) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Quel est l'ordre de convergence du schéma (4)-(5) ?