Contrôle continu du 28 novembre 2018. Durée 2h30.

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*

— *Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.*

Problème I.

On considère le problème aux limites :

$$\left\{\begin{array}{ll} -u''(x) + cu(x) = f, & x \in]0,1[, \\ u'(0) - \alpha(u(0) - \beta) = 0 & \\ u'(1) + \alpha(u(1) - \beta) = 0. & \end{array}\right. \tag{1}$$

avec $c \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Donner la discrétisation de (1) par un schéma aux différences finies d'ordre 1. Ecrire le système linéraire $A_h u_h = b_h$ qui en découle.

2. Résoudre le système $A_h u_h = b_h$ pour $h = 1/2$, $c = 0$, $f = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

3. Donner la discrétisation de (1) par un schéma aux difféfences finies d'ordre 2 et écrire le système linéraire associé.

Problème II.

Soit $\Omega =]0,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$. On se propose d'étudier deux schémas numériques pour le problème suivant :

$$-\Delta u(x,y) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3}$$

où $k > 0$ est un reél donné et $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ est donnée. On note u la solution exacte de (2)-(3) et on suppose que $u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega})$.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ telle que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla \varphi(x,y)\, dxdy + \int_\Omega k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy = \int_\Omega f(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy.$$

En déduire que si $f \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$, on a alors $u \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on pose $h = 1/(N+1)$, et $u_{i,j}$ est la valeur approchée recherchée de $u(ih, jh)$, $(i,j) \in \{0, \ldots, N+1\}^2$. On pose $f_{i,j} = f(ih, jh)$, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2$. On s'intéresse au schéma aux différences finies suivant :

$$a_0 u_{i,j} - a_1 u_{i-1,j} - a_2 v u_{i+1,j} - a_3 u_{i,j-1} - a_4 u_{i,j+1} = f_{i,j}, \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2, \tag{4}$$

$$u_{i,j} = 0, (i,j) \in \gamma. \tag{5}$$

où $\gamma = \{(i,j), (ih, jh) \in \partial\Omega\}$ et a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont données par :

$$a_0 = \frac{4}{h^2} + \frac{k}{h},\ a_1 = \frac{1}{h^2} + \frac{k}{h},\ a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{h^2}.$$

2. Donner une majoration de l'erreur de consistance en fonction de k, h et des dérivées de u, pour le schéma (4)-(5). Donner son ordre de consistance.

3. Montrer que si $(w_{i,j})$ vérifie :

$$a_0 w_{i,j} - a_1 w_{i-1,j} - a_2 w_{i+1,j} - a_3 w_{i,j-1} - a_4 w_{i,j+1} \leq 0, \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2,$$

on a alors

$$w_{i,j} \leq \max_{(n,m)\in\gamma} (w_{n,m}), \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2.$$

4. Montrer que le schéma (4)-(5), sous la condition trouvée à la question 3., est stable (au sens $\|U\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$, avec une constante C à déterminer explicitement, où

$$U = \big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in\{0,\ldots,N+1\}^2}$$

est solution de (4)-(5). [On pourra utiliser la fonction $\varphi(x,y) = y^2/2$].

En déduire, sous la condition trouvée en 3, que le problème (4)-(5) admet, pour tout f, une et une seule solution.

5. Montrer que,

$$\max_{(i,j)\in\{0,\ldots,N+1\}^2} (|u_{i,j} - u(ih, jh)|) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Quel est l'ordre de convergence du schéma (4)-(5) ?

Problème III.

Soient ε et μ deux réels positifs. On considère le problème :

$$\left\{ \begin{array}{lr} u_t(x,t) + \mu u_x(x,t) - \varepsilon u_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0,1[, t \in]0,T[\\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, & t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), & x \in]0,1[\end{array} \right. \tag{6}$$

1. En s'inspirant du schéma de Crank-Nicolson, construire un schéma d'ordre 2 en temps et en espace pour approcher la solution du problème (6).

2. Montrer que l'erreur de consistance est majorée par $C(k^2 + h^2)$, $C > 0$.

3. Sous quelle(s) condition(s) sur k et h a-t-on $\|u^n\|_2 \leq \|u^0\|_2$, $\forall n \leq M$. Donner un résultat de convergence pour ce schéma.