

**Contrôle du 8 Janvier 2020. Durée 2 heures.**

- On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.
  - Les notes de cours, de TD et de TP ne sont pas autorisées.
  - Les appareils électroniques sont interdits.
- 

**Exercice I. (6pts)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice à diagonale strictement dominante vérifiant, pour  $\delta > 0$  donné,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| + \delta, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

1. (1pt) Montrer que  $A$  est inversible.
2. (1pt) Montrer que  $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 1/\delta$ .
3. (1pt) On considère le système linéaire  $Bx = b$  avec

$$B = \begin{pmatrix} -i & 7 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  une matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose  $A = PB$ . Vérifier que  $A$  est à diagonale strictement dominante. Expliciter  $\delta$ .

4. (1pt) Montrer que les systèmes  $Bx = b$  et  $Ax = b$  sont équivalents.
5. (2pts) Si l'on désigne par  $\tilde{x}$  la solution du système  $B\tilde{x} = b + 10^{-3}b$ , montrer que

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq 4 \cdot 10^{-3}.$$

**Exercice II. (6pts)** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On cherche à approcher la solution du système linéaire

$$Ax = b, \tag{S}$$

par la méthode itérative de Jacobi. On note  $J$  la matrice d'itération de Jacobi.

1. (1pt) Montrer qu'il existe un entier  $p > 0$  tel que  $J^p = 0$ .
2. (1pt) Montrer que  $x^{(k+1)} - x = J(x^{(k)} - x)$ .

3. (1pt) En déduire le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode de Jacobi. Commenter.
4. (1pt) Comment généraliseriez-vous ce résultat ?
5. (2pts) On pose  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ . Calculer tous les termes de la suite  $(x^{(k)})$  permettant de résoudre (S).

**Exercice III. (3pts)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ .

1. (1pt) Calculer la factorisation  $LU$  de  $A$ .
2. (1pt) Utiliser cette factorisation pour calculer la matrice inverse de  $A$  (on pourra résoudre trois systèmes linéaires).
3. (1pt) Quel est l'avantage de la factorisation  $LU$  pour résoudre un système linéaire par rapport à la méthode de Gauss ?

**Exercice IV. (5 pts)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Considérons  $(n + 1)$  points équidistants de  $[a, b]$ , d'abscisses  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$ , avec le paramètre de discrétisation  $h = (b - a)/n$ . Les points  $x_i$  forment la grille (ou maillage) d'approximation.

Les valeurs de  $f$  aux points  $x_i$ , notées  $f_i := f(x_i)$ , sont supposées connues. On note également  $f'_i := f'(x_i)$ , les valeurs discrètes de la dérivée première, que l'on cherche à calculer.

1. (2 pts) Écrire les développements de Taylor de  $f_{i\pm 1}$  et de  $f_{i\pm 2}$  au voisinage de  $x_i$ . En déduire les développements de

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad \text{et} \quad \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h}.$$

2. (1 pt) Écrire les développements de Taylor de  $f'_{i\pm 1}$  au voisinage de  $x_i$ .
3. (2 pts) Soit la formule générale ( $2 \leq i \leq n - 2$ ) :

$$\frac{1}{3}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{3}f'_{i+1} - a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} = R(h^p, f'', f^{(3)}, \dots).$$

Utiliser les développements de Taylor précédents pour trouver l'expression de  $R$ .

Calculer les coefficients  $a$  et  $b$  pour que l'erreur de troncature  $R$  contienne des termes  $\sim h^p$ , avec  $p \geq 6$ . En déduire le schéma d'approximation aux différences finies qui permet de calculer les valeurs  $f'_i$  de la dérivée première.