Université de Rouen
L1, MIEEA
Algèbre linéaire

Partiel d'Algèbre linéaire du 20 Juin 2012. Durée 2 heures.

– *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
– *Les notes de cours et de TD sont interdites.*
– *La calculette et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*

Exercice 1 Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1) Une application linéaire f de E_1 dans E_2 est surjective seulement si $\mathrm{Im}(f) = E_2$.
2) Soit A une matrice carrée orthogonale, c'est-à-dire $A^tA = I$, alors $\det(A) = \pm 1$.
3) Si M est une matrice carrée de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$.
4) Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 2 Soit la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det(A_3)$. Quel est le rang de A_3 ?
2) Soient $n \geq 3$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $a_{i,j+1} = a_{i,j} + r$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < n$, alors $\det(A_n) = 0$. Quel est le rang de A_n ?

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est nilpotente d'ordre 3. Est-elle inversible ?
2. Montrer que $I_3 - A$ est inversible et que l'on a
$$(I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2.$$
(On rappelle que I_3 est la matrice identité de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$).
3. En déduire la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Soient λ un réel et f_λ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f_\lambda(x,y,z) = (x + 7y + 6z, 2x + 3y + z, \lambda x + 2y + z).$$

1. Vérifier que f_λ est une application linéaire.
2. Donner la matrice M_λ de f_λ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Pour quelles valeurs du paramètre λ l'application f_λ n'est-elle pas bijective ?
4. Dans le cas où f n'est pas injective, déterminer les dimensions de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$. Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.