Rattrapage du 27 Juin 2019. Durée 2 heures

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours et de TD sont interdites. La calculette et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*

Exercice I. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Un système linéaire homogène admet une unique solution.

2. L'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy \leq 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Si F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^m$, alors $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

4. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, est de dimension m.

5. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$. Si $\dim(\ker A) = 2$, alors $\text{rg}(A) = 2$.

Exercice II. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-ensemble $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0\}$ et le sous-ensemble $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = t \text{ et } y = 0\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

3. Calculer $\dim E_1 \cap E_2$. En déduire la dimension de $E_1 + E_2$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = E_1 + E_2$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$? Pourquoi ?

Exercice III. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et on désigne par $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est donnée par :

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3).$$

1. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On notera $\mathcal{B}$ cette base.

3. En déduire que f est un isomorphisme.

4. Donner la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice IV. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$f(X) = XA.$$

1. Vérifier que f est linéaire.

2. Montrer que f est injective. En déduire que f est un isomorphisme et expliciter son application réciproque f^{-1}.

3. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible.

4. Rappeler la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer la matrice B de f^{-1}, de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans $\mathcal{C}$.