Université de Rouen Normandie
L1, MIEEA, MIM & PMPC
Algèbre 1

Examen de rattrapage du 21 Juin 2018. Durée 2 heures.

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours et de TD sont interdites. La calculette et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*

Exercice I. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\dim F = \dim G = 2$ et $F \cap G = \{0_E\}$ alors $\dim E \geq 4$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $n \geq p$. S'il existe une base B de $\mathbb{R}^n$ telle que $f(B)$ soit une famille liée de $\mathbb{R}^p$ alors f est surjective.

4. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f, g deux endomorphismes de E. Si $f(g(x)) = f(y)$ alors $g(x) = y$.

5. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $AB = I_n$ alors $B = A^{-1}$.

Exercice II. Écrire les systèmes ci-dessous sous forme matricielle. Résoudre ces systèmes à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera dans chaque cas les variables libres et les variables liées.

$$(S_1)\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ 2x - y + 4z &= 4 \\ 3x - 2y + 2z &= 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2)\begin{cases} x - y + 3z - s + 2t &= 4 \\ 3x - y + 2z - 5s + 4t &= 14 \\ 5x - y - 5z - 4s + 7t &= 22 \end{cases}$$

Exercice III. On considère ci-dessous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}, \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z - t = 0\}.$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer les dimensions des sous-espaces vectoriels :

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3 = E_1 \cap E_2 \quad \text{et} \quad E_4 = E_1 + E_2.$$

Exercice IV. Soit f_λ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f_\lambda(x, y, z) = (\lambda x + y + z, x + y + \lambda z)\,.$$

1. Vérifier que f_λ est une application linéaire.

2. Écrire la matrice de f_λ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

3. Pour quelles valeurs du paramètre λ l'application linéaire f_λ n'est-elle pas surjective ? Expliciter dans ce cas, l'image et le noyau de f_λ.

Pour les questions suivantes, on pose $\lambda = 0$.

4. Soient $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $B_2 = \big(f_0(v_2), f_0(v_3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

5. Écrire la matrice de f_0 dans les bases B_1 et B_2.