Université de Rouen Normandie
L1, MIEEA, MIM & PMPC
Algèbre 1

Examen du 17 Janvier 2018. Durée 2 heures.

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours et de TD sont interdites. La calculette et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*

Exercice I. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille linéairement indépendante alors $B\backslash\{v_3\}$ est linéairement indépendante.

2. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Si E est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, alors E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

4. Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $C \neq 0$ et $AC = BC$ alors $A = B$.

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ alors l'application $x \mapsto Ax$ ne peut pas être injective.

Exercice II. Soient α, β et γ trois réels. On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z & = \alpha, \\ 3x + 2y - z & = \beta, \\ 2x + \frac{4}{3}y - z & = \gamma \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Écrire le système (1) sous forme matricielle $AX = b$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ sont à expliciter.

2. Échelonner la matrice augmentée $\widetilde{A}$.

3. Quelles conditions doivent vérifier α, β et γ pour que le système soit compatible ?

4. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 3$ et $\gamma = 0$, quelles sont les variables libres et les variables liées ? Donner l'ensemble des solutions du système (1).

Exercice III. On désigne par $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soient

$$v_1 = e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + e_3 \text{ et } v_3 = e_1 + e_2$$

trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On désigne par

$$P = \Big((v_1)_{\mathcal{C}} \ (v_2)_{\mathcal{C}} \ (v_3)_{\mathcal{C}}\Big)$$

la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer l'inverse P^{-1} de P par la méthode de Gauss-Jordan.

3. Calculer les composantes de $x \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{C}$ sachant que ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont données par :

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base $\mathcal{C}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{BB}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice IV. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$ (On rappelle que $f \circ f(x) = f\big(f(x)\big)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f \circ f(x_0))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{BB}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. Échelonner la matrice $M_{\mathcal{BB}}$. En déduire les dimensions de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

5. Expliciter $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

6. L'image et le noyau de f sont-ils des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire a-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$? Pourquoi ?