Université de Rouen Normandie
L1 IEEEA, MIM et PMPC
Algèbre 1

Contrôle du 8 Janvier 2020. Durée 2 heures

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours et de TD sont interdites. Les appareils électroniques ne sont pas autorisés.*

Exercice I. (3pts) Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Soient f une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et B est une base de $\mathbb{R}^n$. Si $f(B)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$ alors f est surjective.

2. Soit f une application linéaire. Si f est bijective alors f^{-1} est linéaire.

3. Soit f une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Si $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$ alors f est injective.

Exercice II. (4pts) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y - z + t = 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = z \text{ et } y = 0\}.$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer les dimensions $\dim E_1$ et $\dim E_2$ de E_1 et E_2.

3. Calculer $\dim E_1 \cap E_2$. En déduire la dimension de $E_1 + E_2$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = E_1 + E_2$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$? Pourquoi ?

Exercice III. (7pts) On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto & (2x + 4y + 6z, 2y - 3z, -2x - 4t). \end{array}$$

On désigne par $\mathcal{C}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et par $\mathcal{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire la matrice $M_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$ de f dans les bases $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

2. Trouver les dimensions du noyau et de l'image de f et donner une base de l'image de f.

3. L'application f est-elle surjective ?

4. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système linéaire

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = u_4,$$

où $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. En déduire les composantes $(u_4)_{\mathcal{B}}$ de u_4 dans la base $\mathcal{B}$.

5. Donner la matrice $M_{\mathcal{C}_1,\mathcal{B}}$ de f dans les bases $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{B}$.

Exercice IV. (6pts) Soient A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ et g l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g(X) = AXA^T, \text{ où } A^T \text{ est la matrice transposée de } A.$$

1. Vérifier que g est linéaire.

2. Montrer que A^T est inversible et préciser son inverse, puis montrer que g est injective.

3. En déduire que g est un isomorphisme. Puis, montrer que

$$g^{-1}(Y) = (A^{-1})Y(A^{-1})^T, \quad \forall Y \in M_n(\mathbb{R}).$$

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse.

5. Rappeler la dimension de $M_2(\mathbb{R})$ et la base canonique $\mathcal{C}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Calculer la matrice M de g^{-1} dans la base $\mathcal{C}$.