Université de Rouen Normandie
L1 IEEEA, MIM et PMPC
Algèbre 1

Examen du 7 Janvier 2019. Durée 2 heures

— *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
— *Les notes de cours et de TD sont interdites. La calculette et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*

Exercice I. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Soit $\{v_1, v_2, v_3\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Si $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{v_1\} \oplus \text{Vect}\{v_2, , v_3\}$ alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si E et $\mathbb{R}^k$ sont isomorphes alors $\dim E = k$.

3. Soit f une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ injective. Si B est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $f(B)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^m$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $AB = 0$ et $A \neq 0$ alors $B = 0$.

Exercice II. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Exercice III. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et on désigne par $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est donnée par :

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3).$$

1. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Montrer $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est un isomorphisme.

3. Donner la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice IV. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$f(X) = AX^T, \text{ où } X^T \text{ est la matrice transposée de } X.$$

1. Vérifier que f est linéaire.

2. Montrer que f est injective. En déduire que f est un isomorphisme. Puis, montrer que

$$f^{-1}(Y) = Y^T(A^{-1})^T, \quad \forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

3. On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible.

4. Rappeler la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer la matrice B de f, de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans $\mathcal{C}$.