Université de Rouen Normandie A. Blouza
L1, MIEEA, MIM & PMPC
Algèbre 1

Examen du 17 Janvier 2018. Corrigé.

Exercice I. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille linéairement indépendante alors $B \backslash \{v_3\}$ est linéairement indépendante.
Vrai. Puisque $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, la matrice $(v_1\ v_2\ v_3)$ est équivalente à la matrice échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admettant un pivot par colonne. La matrice $(v_1\ v_2)$ est alors équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui admet un pivot par colonne. Par conséquent, la famille $\{v_1\ v_2\}$ est libre.

2. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Faux, car $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ appartiennent à F mais $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin F$.

3. Si E est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, alors E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
Vrai, puisque l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ qui à x associe $(x)_C$, où C est la base canonique $\mathbb{R}^n$, est un isomorphisme (Il est facile de vérifier que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$).

4. Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $C \neq 0$ et $AC = BC$ alors $A = B$.
Faux. Il suffit de donner le contre-exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ alors l'application $x \mapsto Ax$ ne peut pas être injective.
Faux. Il suffit de prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui a un pivot par colonne. Il s'ensuit que le système homogène associé à cette matrice admet comme unique solution la solution triviale ou encore $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Exercice II. Soient α, β et γ trois réels. On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z & =\alpha, \\ 3x+2y-z & =\beta, \\ 2x+\frac{4}{3}y-z & =\gamma \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Écrire le système (1) sous forme matricielle $AX=b$ où $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ sont à expliciter.
La matrice A et le second membre sont donnés par :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4/3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

2. Échelonner la matrice augmentée $\widetilde{A}$.

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & \alpha \\ 3 & 2 & -1 & \beta \\ 2 & 4/3 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & \alpha \\ 0 & 0 & -1/3 & \gamma-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta-3\alpha \end{pmatrix}.$$

3. Quelles conditions doivent vérifier α, β et γ pour que le système soit compatible ?
Pour que le système soit compatible, il faut et il suffit que $\beta-3\alpha=0$.

4. Pour $\alpha=1$, $\beta=3$ et $\gamma=0$, quelles sont les variables libres et les variables liées ? Donner l'ensemble des solutions du système (1).
Les variables liées sont x et z ; la variable libre est y. Le système (1) admet une infinité de solutions paramétrées par la variable libre. L'ensemble des solutions est :

$$S=\left\{(3-\frac{2}{3}y, y, 6), y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice III. On désigne par $\mathcal{C}=(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soient

$$v_1=e_2+e_3, \quad v_2=e_1+e_3 \text{ et } v_3=e_1+e_2$$

trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}=(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
La matrice $(v_1\ v_2\ v_3)$ est équivalente à la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

admettant un pivot par colonne. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On désigne par

$$P=\Big((v_1)_{\mathcal{C}}\ (v_2)_{\mathcal{C}}\ (v_3)_{\mathcal{C}}\Big)$$

la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer l'inverse P^{-1} de P par la méthode de Gauss-Jordan.
En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on vérifie que la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

est équivalente à

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

L'inverse de la matrice de passage est :

$$P^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les composantes de $x \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{C}$ sachant que ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont données par :

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$(x)_{\mathcal{C}} = P\,(x)_{\mathcal{B}}$$

alors

$$(x)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base $\mathcal{C}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{BB}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
On sait que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{C}$ est définie par :

$$(f(x))_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f)\ (x)_{\mathcal{C}}.$$

Et puisque $(x)_{\mathcal{C}} = P\,(x)_{\mathcal{B}}$, alors

$$(f(x))_{\mathcal{C}} = P(f(x))_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f)(x)_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f)P(x)_{\mathcal{B}}$$

ou encore

$$(f(x))_{\mathcal{B}} = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f)P(x)_{\mathcal{B}}.$$

Par conséquent, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{BB}}(f) = P^{-1}\ \mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f)P. \tag{2}$$

En faisant le produit des matrices dans (2), on obtient la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{BB}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

On peut aussi simplement remarquer que,

$f(v_1) = f(e_2+e_3) = f(e_2)+f(e_3) = (e_2+e_3)+(e_1+e_3)+(e_1+e_2) = v_1+v_2+v_3 = f(v_2) = f(v_3).$

Ceci implique que, pour tout $i = 1, 2, 3$,

$$(f(v_i))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice $M_{\mathcal{BB}}(f)$ obtenue dans (3).

Exercice IV. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$ (On rappelle que $f \circ f(x) = f\big(f(x)\big)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f \circ f(x_0))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $f^2 \neq 0$, alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$. Ceci implique que $f(x_0) \neq 0$ car sinon, $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = 0$ (f étant linéaire). La famille $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0)\}$ est une base car si

$$\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$$

alors $\alpha f^2(x_0) + \beta f^3(x_0) + \gamma f^4(x_0) = 0$ ou encore $\alpha = 0$ (puisque $f^2(x_0) \neq 0$). De la même façon on vérifie que $\beta = \gamma = 0$.

2. Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.
La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \Big(f(x_0)_{\mathcal{B}} \; f(f(x_0))_{\mathcal{B}} \; f(f^2(x_0))_{\mathcal{B}}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Échelonner la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. En déduire les dimensions de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
La matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet un pivot à la première et deuxième colonnes. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Ker})(f) = 1$.

4. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
L'application n'est pas injective car dim(Ker)(f)$\neq$ 0. Elle n'est pas non plus surjective car $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, sa dimension étant égale à 2.

5. Expliciter $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
On sait que l'image est engendrée par les colonnes de $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ contenant un pivot c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f)$=Vect$\{f(x_0), f^2(x_0)\}$. Quant au noyau, il est engendré par $f^2(x_0)$ c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f)$ =Vect$\{f^2(x_0)\}$.

6. L'image et le noyau de f sont-ils des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire a-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$? Pourquoi ?
Non la somme n'est pas directe, car $0^2(x_0) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Donc l'intersection de l'image et du noyau de f n'est pas réduite au vecteur nul.