

Partiel d'Algèbre linéaire du 9 mai 2012. Durée 2 heures.

- On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.
 - Les notes de cours et de TD sont interdites.
 - La calculatrice et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
-

Exercice 1 Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

- 1) Si f est une application linéaire de E_1 dans E_2 , alors l'image de toute base de E_1 est une base de E_2 .
- 2) Une application linéaire f est injective seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
- 3) Si A est une matrice antisymétrique, alors A est inversible.
- 4) Si A est une matrice inversible alors la matrice des cofacteurs de A , $\text{Cof}(A)$, est inversible.
- 5) Soient A , B et C des matrices telles que $AC = BC$, alors $A = B$.

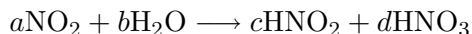
Exercice 2 On pose $E = \mathbb{R}^3$ un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Soient les vecteurs $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .
- 2) Trouver la matrice de passage P de la base canonique \mathcal{C} à la base \mathcal{B} .
- 3) Calculer P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.
- 4) Exprimer dans la base \mathcal{C} l'élément x de E dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont $(1, 1, 1)$ et retrouver ainsi l'écriture canonique de x (c'est-à-dire sous la forme d'un triplet).
- 5) Soit f l'application linéaire de E dans E ayant pour matrice dans la base \mathcal{C}

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 3 On considère la réaction chimique



où a , b , c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée, c'est-à-dire le nombre d'atomes de chaque élément doit être le même avant et après la réaction. Par exemple le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même :

$$2a + b = 2c + 3d.$$

Bien qu'il ait plusieurs valeurs possibles pour a , b , c et d qui équilibrent la réaction, calculer les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction.

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les dimensions de $\text{Im} f$ et $\ker f$. Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.
- 2) Montrer que \mathbb{R}^3 est somme directe de $\text{Im} f$ et $\ker f$.
- 3) On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont-elles semblables ? Pourquoi ?