Université de Rouen
L1, MIEEA
Algèbre linéaire

Partiel d'Algèbre linéaire du 9 mai 2012. Durée 2 heures.

- *On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations.*
- *Les notes de cours et de TD sont interdites.*
- *La calculette et les téléphones portables ne sont pas autorisés.*

Exercice 1 Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1) Si f est une application linéaire de E_1 dans E_2, alors l'image de toute base de E_1 est une base de E_2.
2) Une application linéaire f est injective seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
3) Si A est une matrice antisymétrique, alors A est inversible.
4) Si A est une matrice inversible alors la matrice des cofacteurs de A, $\mathrm{Cof}(A)$, est inversible.
5) Soient A, B et C des matrices telles que $AC = BC$, alors $A = B$.

Exercice 2 On pose $E = \mathbb{R}^3$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient les vecteurs $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
2) Trouver la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.
4) Exprimer dans la base $\mathcal{C}$ l'élément x de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 1, 1)$ et retrouver ainsi l'écriture canonique de x (c'est-à-dire sous la forme d'un triplet).
5) Soit f l'application linéaire de E dans E ayant pour matrice dans la base $\mathcal{C}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 3 On considère la réaction chimique

$$a\mathrm{NO_2} + b\mathrm{H_2O} \longrightarrow c\mathrm{HNO_2} + d\mathrm{HNO_3}$$

où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée, c'est-à-dire le nombre d'atomes de chaque élément doit-être le même avant et après la réaction. Par exemple le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même :

$$2a + b = 2c + 3d.$$

Bien qu'il ait plusieurs valeurs possibles pour a, b, c et d qui équilibrent la réaction, calculer les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction.

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les dimensions de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$. Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.
2) Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.
3) On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont-elles semblables ? Pourquoi ?