MATRICES

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_5)$, une base de E.

(1) Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image de f et son noyau. Donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}\, f$.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$.

(1) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f \circ f(x_0))$ soit une base de E.

(2) Déterminer la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

(3) Déterminer les endomorphismes g qui commutent avec f.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer les dimensions de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$. Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.

(2) Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$.

(3) On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que les matrices A et B ne sont pas semblables (on dit que deux matrices carrées d'ordre n, U et V sont semblables s'il existe une matrice carrée d'ordre n inversible P telle que $U = P^{-1}VP$).

4. Soit n un entier non nul. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On considère les sous ensembles $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ des matrices symétriques et antisymétriques.

(1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer leurs dimensions.

(2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de $\mathcal{A}_n$ et de $\mathcal{S}_n$.

5. (1) Vérifier directement, en utilisant la définition de la multiplication matricielle, que $(AB)^t = (B^t)(A^t)$ (quand ces produits ont un sens).

(2) Soit A une matrice $m \times n$ (m lignes et n colonnes). Montrer que (A^tA) et (AA^t) sont des matrices carrées symétriques.

6. En utilisant la méthode d Gauss-Jordan, calculer les matrices inverses des matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que A est inversible si et seulement si A^t est inversible, et que dans ce cas $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(2) Montrer que si A est nilpotente d'ordre p, alors $I_n - A$ est inversible et que l'on a

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

Retrouver la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. On pose $E = \mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (0,1,1)$.

(1) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

(2) Trouver la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

(3) Calculer P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan. Exprimer dans la base $\mathcal{C}$ l'élément x de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1,1,1)$ et retrouver ainsi l'écriture canonique de x (c'est-à-dire sous la forme d'un triplet).

(4) Soit f l'application linéaire de E dans E ayant pour matrice dans la base $\mathcal{C}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{CC}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{BB}}(f)$.

DÉTERMINANTS

9. Soit la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\det(M_3)$. Quel est le rang de M_3 ?

(2) Soient $n \geq 3$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $a_{i,j+1} = a_{i,j} + r$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < n$, alors $\det(M) = 0$. Quel est le rang de M ?

10. (1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant d'une matrice dont tous les éléments valent 1 sauf éventuellement ceux de la diagonale qui valent $x + 1$.

(2) Soit A une matrice carrée orthogonale, c'est-à-dire $A^t A = I_n$. Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

11. Déterminer le rang des matrices complexes $\begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & 3a & 2a+1 \end{pmatrix}$ en discutant suivant les valeurs de a pour la deuxième.

12. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sa matrice inverse.

13. Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

14. Les nombres a, b et c étant racines de l'équation $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, montrer que

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \alpha^3\gamma \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\beta^2.$$

15. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de Van der Monde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer par récurrence que $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

SYSTÈMES

16. (1) Dans quel cas le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = \alpha \\ x + y + mz = \beta \end{cases}$$

est-il de Cramer ?

(2) Résoudre le système dans le cas de Cramer.

17. On considère le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$$

(1) Montrer que ce système est de Cramer si et seulement si n est impaire (voir Exercice 13.).

(2) Discuter des solutions de ce système.