Algèbre linéaire. Fiche n°4. Applications linéaires.

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Si oui, déterminer (a) leur noyau et leur image ; (b) déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives ; (c) calculer la matrice associée dans les bases canoniques.

$$f_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x, 3y+x) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x+4y \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z, 1) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy+x-z, x) \end{array}$$

2. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

(2) Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

(3) Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

3. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer les équivalences :

(1) f est injective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F.

(2) f est surjective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.

4. Montrer que tout espace vectoriel réel de dimension $n > 0$ est isomorphe à l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$. En particulier, deux espaces vectoriels réels ayant la même dimension sont isomorphes.

5. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_3 + e_1$, $f(e_3) = e_1 + e_2$.

1) Montrer que f est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les images par f des sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y+z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = y = z\right\}.$$

6. (1) Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?

(2) Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{15}$ dans $\mathbb{R}^{30}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?

(3) Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{25}$ et $\mathbb{R}^{40}$?

7. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer le noyau et l'image de f. Quel est le rang de f ?

2) Montrer que $f^2 = 3f$.

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = (5x - 6y, 3x - 4y).$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.

2) Justifier que $B = \big((1,1),(2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis donner la matrice de f dans cette base.

9. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base du noyau de A.

(2) Déterminer une base de l'image de A.

10. On note respectivement $B = (v_1, v_2, v_3)$ et $C = (w_1, w_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Donner explicitement $f(x, y, z)$.

2) Déterminer Ker f puis Im f. En déduire rg(f).

3) On pose $v_1' = v_2 + v_3$, $v_2' = v_3 + v_1$ et $v_3' = v_1 + v_2$.

a) Vérifier que $B' = (v_1', v_2', v_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer la matrice de f dans les bases B' et C.

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Ker u = Im u

(2) $u^2 = 0$ et $\dim \mathrm{Ker}\ u = \dim \mathrm{Im}\ u = \dfrac{\dim E}{2}$

12. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, u(x_0), u^2(x_0)\big)$ soit une base de E.

13. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ l'application définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Montrer que Ker $f = \{(x, -x) : x \in E_1 \cap E_2\}$.

(3) Montrer que Ker f et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.

(4) Montrer que f a pour image $E_1 + E_2$.

(5) Déduire de ce qui pécède la formule

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

14. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que

$$\dim(\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ g) = \mathrm{rang}(f) - \mathrm{rang}(f \circ g).$$

15. Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égale à $n > 0$. Soit $f : E \longrightarrow E$ l'application définie par

$$f(P)(X) = P(X) - P(X - 1).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Montrer que Im f est inclus dans l'ensemble des polynômes de degré inferiérieur ou égale à $n - 1$.

(3) Montrer que Ker f est l'ensemble des polynômes constants. En déduire Im f.

(4) On pose $P_0(X) = 1$, et pour tout $0 < k \leq n$

$$P_k(X) = \frac{1}{k!}\, X\,(X - 1)\, \ldots\, (X + k + 1).$$

Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E.

(5) Pour tout $k \leq n$, écrire $f(P_k)$ dans la base $\mathcal{B}$.