Algèbre linéaire. Fiche n°3. Sous–espaces vectoriels.

---

1. Déterminer si l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de F lorsque

a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 7\},\ F = \mathbb{R}^2$,

b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\},\ F = \mathbb{R}^2$,

c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\},\ F = \mathbb{R}^2$,

d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = 0\}$ où a, b sont des réels donnés, $F = \mathbb{R}^2$.

e) $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + \alpha y + 1 \geqslant 0\big\}\ ,\ F = \mathbb{R}^2$,

f) $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\big\}$, où $a \in \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^3$,

g) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, e^x e^y = 0\},\ F = \mathbb{R}^3$,

h) $E = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\},\ F = \mathbb{R}^3$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2) a) Donner un contre-exemple simple montrant que $F \cup G$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b) On considère le sous-ensemble

$$\{u \in \mathbb{R}^n, (\exists v \in F\ \exists w \in G, u = v + w)\}$$

que l'on note $F + G$ (on dit que $F + G$ est *la somme de* F et de G). Vérifier que $F + G$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ et que c'est le plus petit contenant $F \cup G$.

3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, b - 2c + d = 0\}\ , \quad \text{et} \quad W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

1) Vérifier que V et W sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

2) Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0, -1),\ v_3 = (0, 0, 1, 2),$$

forment une base de V et donner alors la dimension de V.

3) Trouver une base de chacun des s.e.v. $W, V + W$ et $V \cap W$ puis donner leurs dimensions respectives.

4. Etant donnés deux s.e.v. F et G de $\mathbb{R}^n$, on dit que $\mathbb{R}^n$ est la *somme directe* de F et de G (et on écrit que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$) si tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

1) Montrer que l'on a $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ si et seulement si $\mathbb{R}^n = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

2) On considère dans cette question

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}.$$

Après avoir vérifié que F et G sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

3) On considère dans cette question

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

On vérifie que F et G sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ (on pourra se dispenser de cette vérification).

(a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

(b) A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

5. On considère le s.e.v. F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 0),\ v_2 = (-1, 1, 2),\ v_3 = (3, 0, -4),\ v_4 = (5, 1, -6),$$

autrement dit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
Donner F sous forme cartésienne, c'est à dire caractériser les éléments de F par une ou plusieurs équations de la forme $ax + by + cz = 0$. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = 2x \text{ et } z - 2y - x + t = 0\}.$$

1) Vérifier que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.
2) Quelle est la forme générale d'un élément de F ? En déduire une famille génératrice de F.

6. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous–ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,, x - y + z - \lambda t = 0\}.$$

1) Vérifier que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.
2) Déterminer une base de F.

7. Soit F le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$u = (1, -1, 1)\,, v = (0, -1, 2)\,, w = (1, -2, 3)\,.$$

1) Les vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants ?
2) Trouver une base de F puis donner la dimension de F.
3) On considère le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + z = 0\}.$$

   a) Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   b) Trouver une base de G puis donner la dimension de G.
4) Montrer que $F \subset G$, puis en déduire que $F = G$.

8. Soit $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec

$$v_1 = (1, 1, 2, 1)\,, v_2 = (0, 0, 1, 1)\,, v_3 = (1, 1, 0, -1)\,, v_4 = (2, 2, 1, -1)\,, v_5 = (1, 2, 2, 0)\,.$$

On note G le s.e.v engendré par les vecteurs de F, autrement dit $G = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

A) On se propose d'extraire de F, famille génératrice de G, une base de G.
   1) Pourquoi peut-on affirmer, sans faire aucun calcul, que ces vecteurs $v_1, \ldots, v_5$ sont liés ? Trouver alors des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ non tous nuls tels que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_5 v_5 = 0$ et en déduire une expression de l'un des vecteurs v_i comme combinaison linéaire des autres. On notera ce vecteur v_{i_0}.
   2) On pose $F_0 = F \backslash \{v_{i_0}\}$. Comparer G et le s.e.v. engendré par les vecteurs de F_0.
   3) Vérifier que les vecteurs de F_0 sont liés et en déduire l'expression de l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des autres. On notera ce vecteur v_{i_1}.
   4) On pose $F_1 = F_0 \backslash \{v_{i_1}\}$. Comparer G et le s.e.v. engendré par les vecteurs de F_1.
   5) Vérifier que la famille F_1 est libre. Conclure.

B) En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, donner une méthode permettant d'extraire une base d'une famille génératrice $v_1, \ldots, v_k$ d'un espace vectoriel E.

9. On donne les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 2, 2, 0), \quad v_4 = (0, 0, 0, 1), \quad v_5 = (3, 1, 1, 2),$$

et $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Extraire de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ une base de F. Quelle est la dimension de F ?

10. 1) Soit F le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$.

a) Donner une base et la dimension de F.

b) Compléter la base de F trouvée au a) en une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Mêmes questions pour le s.e.v. F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, -4, -2, 1)$, $v_2 = (1, -3, -1, 2)$ et $v_3 = (3, -8, -2, 7)$.

11. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous–ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,, x = y - 3z\,, z = 2t\}.$$

1) Donner une base et la dimension de F.

2) Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

12. Discuter la dimension du s.e.v. F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, -3)$, $v = (a, 3, -1)$, $w = (0, a, b)$, suivant les valeurs des paramètres a et b. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $F = \mathbb{R}^3$?