Algèbre linéaire. Fiche n°2. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

---

1. (1) Soit dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les 3 vecteurs $w = (-1, 2)$, $u = (2, 3)$ et $v = (3, -2)$. Le vecteur w appartient-il à $\mathrm{Vect}(u, v)$, sous-espace vectoriel engendré par u et v.

(2) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soient $B = (-1, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (1, 2, 1)$ et $E = (1, 5, 5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $D \in \mathrm{Vect}(B, C)$? $E \in \mathrm{Vect}(B, C)$?

(3) Soit t un nombre réel, et $F = (2, 1, t)$. Pour quelle valeur de t le vecteur $F \in \mathrm{Vect}(B, C)$?

(4) Expliciter $\mathrm{Vect}(B, C)$ (trouver la forme générale de ses vecteurs).

2. Toute famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendante si $m > n$. Cette assertion est-elle vraie ? Justifier.

3. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ si, et seulement si la forme échelonnée a une position pivot dans chaque ligne.

4. Calculer $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$$

5. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

6. Écrire les systèmes ci-dessous sous la forme $Ax = b$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes.

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

7. Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants.

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b) A est une matrice 4×2, $A = (\alpha_1\ \alpha_2)$ et α_2 n'est pas multiple de α_1.

c) A est une matrice 4×3, $A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$. Les vecteurs α_1 et α_2 sont linéairement indépendants, et α_3 n'est pas une combinaison linéaire de α_1 et α_2.

8. a) Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(1, 7, -4)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u = (1, -3, 2)$ et $v = (2, -1, 1)$? Même question pour le vecteur $(2, -5, 4)$.

b) Trouver $k \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $u = (1, -2, k)$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $v = (3, 0, -2)$ et $w = (2, -1, -5)$.

9. Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^m$ linéairement indépendants. Montrer qu'il en est de même des vecteurs $u+v$, $u-v$ et $u - 2v + w$.

10. Déterminer dans chaque cas si les vecteurs donnés forment une base de $\mathbb{R}^3$.

a) $(1, 1, 1)\,, (1, 2, 3)\,, (2, -1, 1)$,

b) $(1, 2, 3)\,, (1, 0, -1)\,, (3, -1, 0)\,, (2, 1, -2)$,

c) $(1, 1, 2)\,, (1, 2, 5)\,, (5, 3, 4)$.

11. On considère les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Dire si les vecteurs sont linéairement indépendants dans chacun des cas suivants.

(1) $u = (0, 0)$, $v = (1, 2)$.

(2) $u' = (1, 1)$, $v' = (4, 5)$.

(3) $u'' = (-1, 1)$, $v'' = (2, 1)$, $w'' = (3, 7)$.

(4) $a = (-2, 1, -1)$, $b = (1, 1, 1)$, $c = (1, 2, t)$ (discuter selon t).

12. (1) La famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

(2) Expliquer pourquoi $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. La famille $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle libre dans cet espace ?

13. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Calculer les dimensions des sous-espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 0\}, \qquad E_2 = \{(x, y, z, t) : x - y - z - t = 0\}, \qquad E_3 = E_1 \cap E_2.$$

14. Soit $\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, u_3\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (0, 1, 1)\,, u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les composantes de $v = (1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

15. Soit $\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, u_3\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (1, 1, 1)\,, u_2 = (-1, 1, \frac{1}{2})$ et $u_3 = (0, -1, \frac{1}{2})$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b) Déterminer les composantes de $v = (2, 3, 4)$ dans la base $\mathcal{B}$.