Algèbre linéaire. Fiche n°1. Les systèmes linéaires.

1. Annie et Arthur sont frère et soeur. Annie a autant de frères que de soeurs mais Arthur a deux fois plus de soeurs que de frères. Combien y-a-t-il d'enfants dans cette famille ?

2. *Un problème d'argent :* Monsieur X. dispose de trois comptes en banque A, B et C. Son compte A est non rémunéré. Son compte B est rémunéré à hauteur de 10% par an. Enfin, son compte C est quant à lui rémunéré de 20% par an. Monsieur X. n'intervient pas sur ses comptes pendant trois ans. Cependant, chaque année, les bénéfices de chaque compte sont reversés directement sur le même compte. Monsieur X. a déclaré avoir en tout sur ses trois comptes la somme de 12000 euros en 2006, de 13400 euros en 2007, et de 15040 euros en 2008.
De quelles sommes Monsieur X. disposait-il sur chacun de ses comptes en 2006 ?

3. Sans faire de calculs, déterminer lesquels des systèmes homogènes suivants ont d'autres solutions que la solution triviale.

$$\begin{cases} x+3y-z &= 0 \\ x-8z &= 0 \\ 4z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-2y &= 0 \\ 6x-4y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+3z &= 0 \\ x+2y &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

4. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera dans chaque cas les variables libres.

$$\begin{cases} x-2y+z &= 7 \\ 2x-y+4z &= 17 \\ 3x-2y+2z &= 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ 2x-y+4z &= 4 \\ 3x+8y-13z &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-2z &= -1 \\ 3x-y+2z &= 7 \\ 5x+3y-4z &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5y+3z-4s+2t &= 4 \\ 3x-7y+2z-5s+4t &= 9 \\ 5x-10y-5z-4s+7t &= 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z+4t &= 2 \\ 2x+5y-2z+t &= 1 \\ 5x+12y-7z+6t &= 7 \end{cases}$$

5. Expliquer à l'aide de l'algorithme de Gauss pourquoi tout système linéaire admet ou bien

a) une unique solution,

b) aucune solution,

c) ou une infinité de solution.

6. Déterminer les valeurs de k de sorte que les systèmes suivants d'inconnues x, y et z admettent, (i) une unique solution, (ii) aucune solution, (iii) une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x-2y &= 1 \\ x-y+kz &= -2 \\ ky+4z &= 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} kx+y+z &= 1 \\ x+ky+z &= 1 \\ x+y+kz &= 1 \end{cases}$$

7. Quelles conditions doivent vérifier a, b et c pour que le système suivant d'inconnues x, y et z admette une solution.

$$\begin{cases} x+2y-3z &= a \\ 2x+6y-11z &= b \\ x-2y+7z &= c \end{cases}$$

8. 1) Résoudre le système suivant en prenant $(e,f)=(1,0)$ puis $(e,f)=(3,2)$.

$$\begin{cases} 3x+6y &= e \\ 2x+4y &= f \end{cases}$$

2) Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On considère les trois propriétés suivantes :
P_1 : pour *tout* couple de réels (e, f), le système

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

admet *exactement* une solution.
P_2 : le système homogène

$$\begin{cases} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{cases}$$

admet $(x, y) = (0, 0)$ pour unique solution.
P_3 : le nombre $ad - bc$ est non nul.

Montrer que ces trois propriétés sont équivalentes.

3) Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les ensembles

$$D_1 = \{M(x, y) \in \mathcal{P},\ ax + by = e\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{M(x, y) \in \mathcal{P},\ cx + dy = f\}.$$

Quelle est la nature géométrique de ces ensembles ? Interpréter géométriquement les différentes possibilités pour l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$

9. Soit f une fonction polynomiale de degré 3 sur $\mathbb{R}$, que l'on écrit sous la forme suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer les paramètres réels a, b, c et d (s'il en existe) pour que f satisfasse : $f(1) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -5$, $f(2) = 15$.

10. Trouvez un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p), (2, q), (3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?