Université de Rouen
Master 2, MFA 2010–2011
Outils informatiques pour les mathmatiques

Initiation Scilab

---

1. Résolution d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires

Scilab possède un solveur approché de résolution de systèmes d'équations non linéaires du type $f(x) = 0$ nommé *fsolve* prenant en argument d'entrée un point initial et une fonction (définie séparement dans un script de type fonction ou avec l'instruction *deff*).

a) Sur l'exemple de la recherche de la solution de l'équation $\cos(x) = x$, comparer, en nombre d'évaluations et en temps de calcul, la vitesse des méthodes de dichotomie et du point fixe pour obtenir un résultat à la précision 10^{-15}.

b) Comparer avec le résultat donné par *fsolve* (on pourra utiliser l'instruction *format* pour afficher le résultat du calcul avec un grand nombre de décimales.)

2. Résolution d'équations ou de systèmes d'équations différentielles

L'instruction *ode* permet la résolution approchée de tout problème de Cauchy sur un intervalle donné. Le second membre de l'EDO $y' = f(t, y)$ est en particulier rentré comme argument sous la forme d'une fonction ayant toujours deux variables — même quand l'équation est autonome — t (variable réelle) et y (vecteur) :

```
function [f]= MonSecondMembre (t,u)
Ici, le code donnant les composantes de f en fonction de t et  de u.
endfunction
```

Avant toute étude d'équation différentielle, il est cependant prudent de s'assurer du bon conditionnement du probème de Cauchy d'un point de vue continu ou numérique. Les exemples ci-dessous soulignent l'intérêt d'une telle précaution.

a) Utiliser la méthode d'Euler explicite à pas constant pour résoudre les EDO suivantes :

$$y' = 3y - 1, y(0) = 1/3 \quad \text{sur} \quad [0, 30] \quad \text{partant de} \quad y_0 = 0.3333333333$$

puis

$$y' = -150y + 30, y(0) = 1/5 \quad \text{sur} \quad [0, 1].$$

b) Comparer les résultats obtenu avec les valeurs exactes de y à l'extrémité de l'intervalle.

3. L'oscillateur de Van Der Pol

a) Écrire une fonction scilab donnant le second membre de l'équation différentielle d'odre 2, dite de Van Der Pol :

$$y'' = 0.4(1 - y^2)y' - y.$$

b) Utiliser la commande *ode* pour résoudre l'équation sur $[0, 2]$ en partant de données sur l'inconnue y et sa dérivée y' à l'instant $t = 0$.

4. **Espace de phase**
L'espace de phase est un système de coordonnées à deux dimensions qui sont l'altitude y et la vitesse y'. Dans le cas où l'espace des phases est un plan, on peut obtenir une idée de la dynamique en dessinant simplement le champ de vecteurs dans un rectangle $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ avec l'instruction graphique *fchamp* dont la syntaxe est :

```
fchamp(MonsecondMembre,t,x,y)
```

où MonsecondMembre est le nom de la fonction Scilab du second membre de l'EDO, T est l'instant pour lequel on veut dessiner le champ, et x, y sont des vecteurs lignes à nx et ny composantes, donnant les points de la grille sur lequels seront dessinés les flèches représentant le champ de vecteurs

a) Tracer le champ de vecteurs issu de l'équation de Van Der Pol

b) L'instruction *portrait* (reprenant uniquement la fonction précédente MonSecondMembre en argument) permet pour sa part de tracer le portrait de phase d'un système dynamique plan.

5. **Equations de Lokta-Volterra**

a) A l'aide de l'instruction *ode*, résoudre sur $[0, 25]$ le système d'équations dit de Lokta-Volterra intervenant en dynamique des populations ($x(t)$ désigne la densité de prédateurs, $y(t)$ celle de proies) :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & xy/2 - x/2 \\ y'(t) & = & -xy + y \end{array}\right.$$
avec $x(0) = y(0) = 2$.

b) Après avoir représenter graphiquement les solutions, vérifier numériquement les principales propriétés qualitatives de celles-ci (solutions bornées, strictement positives,...).

c) Reprendre l'étude de ce système dynamique à 2 variables avec l'instruction *portrait* afin de mettre en évidence les points fixes du système et de déterminer leur stabilité.

6. **Test d'ajustement χ^2**
Soit $x^m = (x_1, \ldots, x_m)$ un échantillon. Et soit l'hypothèse $\mathcal{H}$: "les variables aléatoires sous-jacentes $(X_1, \ldots, X_m)$ suivent la loi $\mathcal{L}$". Une question est de savoir si cette hypothèse est réaliste. Sur cet échantillon, on peut calculer les statistiques élémentaires (moyenne et écart type empirique) et si celles-ci semble raisonnablement proches de l'espérance et de l'écart type de $\mathcal{L}$, on peut alors mettre en œuvre un test statistique. Le test χ^2 s'applique sur une loi discrète prenant un nombre fini de valeurs. Par exemple supposons que la loi de $\mathcal{L}$ est donnée par $\{(v_i, p_i),\ 1 \leq i \leq n\}$. Le test consiste à calculer la quantité :
$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (o_{i-mp_i})^2}{mp_i}$$
où o_i est le nombre de résultats x_i égaux à v_i et à comparer la valeur obtenue y à un seuil y_{seuil}, le test étant alors positif si $y \leq y_{seuil}$.
Exemple. — On dispose d'un dé numéroté de 1 à 6 et on veut savoir s'il est parfaitement équilibré, c'est-à-dire si la probabilité d'obtenir chaque numéro est effectivement $1/6$: ici X' la variable aléatoire correspondant au dé possédé (on ne connait pas les probabilités théoriques d'apparition de chaque numéro) et X est la variable définie par $P(X = i) = 1/6$ pour $i = 1, \ldots, 6$. On cherche à savoir si X' a pour loi celle de la variable aléatoire X.
On a effectué 200 fois l'expérience suivante avec le même dé : on le jette autant de fois qu'il le faut jusqu'à obtenir un 1 (mais on arrête lorsque le 1 n'est pas sorti au bout de 10 lancés). On a obtenu les résultats suivants :

nombre de jets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥ 11
nombre d'expériences	36	25	26	27	12	12	8	7	8	9	30

par exemple il y a 36 expériences où le 1 est sortie lors du premier lancé, 25 où le 1 est sorti au deuxième lancé, etc...
Effectuer un test χ^2 pour essayer de répondre à la question.