Transformation de Fourier

1 **L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz**

On munit l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide de la famille de semi-normes

$$p_k(f) = \sup_{|\alpha|\leq k,\ |\beta|\leq k} \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace de Fréchet.

b) Montrer que $\mathcal{S} \subset L^p$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et que l'injection canonique est continue.

c) Montrer que l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continu.

d) On appelle $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|)^k.$$

Soit $f \in \mathcal{O}_M$ fixée. Montrer que la multiplication par f est continue de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. En particulier, montrer que la multiplication par les polynômes est continue.

e) Montrer que le produit $(f, g) \mapsto fg$ est continu de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

f) Pourquoi, si f et $g \in \mathcal{S}$, peut-on définir le produit de convolution $f * g$?
Montrer que le produit de convolution est continu de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. [On utilisera l'identité de la question (b) de l'exercice 9.]

g) Soit (ρ_m) une suite régularisante et $f \in \mathcal{S}$. Montrer que $f * \rho_m \to f$ dans $\mathcal{S}$.

2 a) On définit sur $\mathbb{R}$ la gaussienne $g(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$.
Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle $g' + tg = 0$ dans $\mathbb{R}$ avec $g(0) = 1$. En déduire que $\widehat{g}(\tau) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(\tau)$. [On rappelle que $\int g = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.]

b) Soit A une matrice de taille n définie positive. On pose $g_A(x) = \exp(-\frac{(Ax,x)}{2})$.

i) Montrer que $g_A \in \mathcal{S}$.

ii) Montrer que $\widehat{g_A}(\xi) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det A)^{\frac{1}{2}}} g_{A^{-1}}(\xi)$. [On commencera par traiter le cas où A est diagonale.]

iii) Pour A et B deux matrices définies positives, calculer $g_A * g_B$.

3 Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^n$ de la forme $P(x)\exp(-|x|^2/2)$, avec P polynôme.

a) Montrer que $E \subset \mathcal{S}$.

b) Montrer que la transformée de Fourier définit un isomorphisme de $E \to E$.

4 Distributions tempérées

a) Montrer que $T \in \mathcal{S}'$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$ tels que $|T(\phi)| \leq Cp_k(\phi)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

b) Montrer que si $f \in \mathcal{O}_M$ et $T \in \mathcal{S}'$ alors $fT \in \mathcal{S}'$.

c) Montrer que, pour tout $T \in \mathcal{S}'$, $\widehat{\partial^\alpha T} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}$ et $\widehat{x^\alpha T} = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{T}$.

d) Montrer que $L^p \subset \mathcal{S}'$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

e) En déduire que toute fonction mesurable f vérifiant $(1+|x|)^{-k} f \in L^1$ pour $k \in \mathbb{N}$ est tempérée.

f) Montrer que pour $f \in L^1$ on a $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

g) Montrer que $e^x \notin \mathcal{S}'$. [On construira une fonction positive $\phi \in \mathcal{S}$ telle que $\int e^x \phi(x)\, dx = +\infty$, et on conclura.]

h) Montrer que $e^x \cos(e^x) \in \mathcal{S}'$, mais qu'il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|e^x \cos(e^x)| \leq C(1+|x|)^k$.

i) Montrer que si (ρ_m) est une suite régularisante, on a $T * \rho_m \in \mathcal{S}'$ et $T * \rho_m \to T$ dans $\mathcal{S}'$.

5 Convergence dans $\mathcal{S}'$

On rappelle que $T_k \to T$ dans $\mathcal{S}'$ si $T_k(\phi) \to T(\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{S}$.

a) Soit $f \in \mathcal{O}_M$. On suppose que $T_k \to T$ dans $\mathcal{S}'$. Montrer que $\partial^\alpha T_k \to \partial^\alpha T$, $fT_k \to fT$ et $\widehat{T_k} \to \widehat{T}$ dans $\mathcal{S}'$.

b) Soit $p \in [1, +\infty]$ et (f_k) une suite de fonctions convergeant vers f dans L^p. Montrer que $f_k \to f$ dans $\mathcal{S}'$.

c) Soit (a_k) une suite complexe. On dit que la suite est à croissance lente s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|a_k| \leq C(1+|k|)^N$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que la suite de distributions $(a_k \delta_k)$ converge dans $\mathcal{S}'$ si et seulement si la suite (a_k) est à croissance lente. Quelle est alors la limite de $(a_k\delta_k)$?

[Lorsque la suite (a_k) n'est pas à croissance lente, on montrera qu'il existe une suite $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$ à termes tous distincts telle que $|a_{k_m}| > m(1+|k_m|)^m$. On considérera alors la fonction $\phi = \sum_m \psi_m$ avec $\psi_m(x) = \frac{m}{a_{k_m}}\psi(x-k_m)$ pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $]-1,1[$ et valant 1 au voisinage de 0.]

d) Soit (T_k) une suite de distributions tempérées. La convergence de T_k dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est-elle équivalente à la convergence dans $\mathcal{S}'$?

6 Transformation de Fourier des distributions à support compact

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction $g(\xi) = \langle T_x, e^{-i(x,\xi)}\rangle$.

a) Déterminer $\partial_x^\alpha(e^{-i(x,\xi)})$ et $\partial_\xi^\alpha(e^{-i(x,\xi)})$.

b) Montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\partial^\alpha g(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\langle T_x, x^\alpha e^{-i(x,\xi)}\rangle$.

c) Montrer que $g \in \mathcal{O}_M$.

d) Montrer que $T \in \mathcal{S}'$ et que $\widehat{T} = T_g$. [On pourra raisonner par régularisation.]

7

Soit T une distribution tempérée.

a) Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\widehat{\tau_a T}$ et $\widehat{e^{i(a,x)}T}$ en fonction de $\widehat{T}$.

b) Montrer que $\widehat{\check{T}} = \check{\widehat{T}}$. En déduire que la tranformée de Fourier d'une distribution paire (respectivement impaire) est paire (respectivement impaire).

8

a) Après avoir vérifié que les distributions sur $\mathbb{R}^n$ suivantes étaient tempérées, calculer leur transformée de Fourier

$$\delta_a, \qquad 1, \qquad \cos(a,x), \qquad \sin(a,x), \qquad \partial^\alpha \delta_a, \qquad (x-x_0)^\alpha.$$

b) Même question pour les distributions sur $\mathbb{R}$ suivantes

$$1_{[-1,1]}, \qquad \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \qquad \operatorname{sgn} x, \qquad \mathrm{Y}(x), \qquad e^{-|x|}.$$

[Pour $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, on utilisera le fait que c'est l'unique distribution impaire vérifiant $xT = 1$. Pour $e^{-|x|}$, on cherchera une équation différentielle dont elle est solution.]

9 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe. On considère la distribution $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que T soit tempérée est que la suite (a_k) soit à croissance lente.

10 a) Soit A une matrice inversible de taille n. On rappelle que l'image réciproque d'une fonction f par A est la fonction $f \circ A$ (en identifiant A à l'application linéaire associée dans la base canonique) et que l'image réciproque d'une distribution T est définie par $\langle T \circ A, \phi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle T, \phi \circ A^{-1}\rangle$.

i) Vérifier que $f \circ A \in \mathcal{S}$ lorsque $f \in \mathcal{S}$ et que $T \circ A \in \mathcal{S}'$ lorsque $T \in \mathcal{S}'$.

ii) Montrer que

$$\widehat{T \circ A} = \frac{1}{|\det A|}\widehat{T} \circ {}^tA^{-1}.$$

b) On note T_λ la dilatée de T de rapport $\lambda > 0$ (qui est l'image réciproque de T par l'homothétie de rapport $1/\lambda$). On dit que T est homogène de degré $k \in \mathbb{R}$ si $T_\lambda = \lambda^{-k}T$. Montrer que $\widehat{(T_\lambda)} = \lambda^n(\widehat{T})_\lambda$. Montrer que T est homogène de degré k si et seulement si $\widehat{T}$ est homogène de degré $-n-k$. La masse de Dirac δ est-elle homogène ?

c) On dit qu'une distribution est invariante par rotation si $T \circ O = T$ pour toute matrice orthogonale O.

i) Montrer que T est invariante par rotation si et seulement si $\widehat{T}$ est invariante par rotation.

ii) Montrer que si $S \in \mathcal{S}'$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sont deux distributions invariantes par rotation alors $S * T$ est invariante par rotation.

iii) Même question lorsque $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. [On établira d'abord la formule $(S*T)\circ A = |\det A|(S \circ A) * (T \circ A)$ lorsque la matrice A est inversible.]

11 On définit par récurrence les distributions sur $\mathbb{R}$ par $T_1 = (\delta_1 + \delta_{-1})/2$ et $T_k = T_{k-1} * T_1$. On pose $S_k = \sqrt{k}\,T_k(\sqrt{k}\,\cdot\,)$.

a) Montrer que $T_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et calculer $\widehat{T_k}$.

b) On pose $f_k(\xi) = \widehat{T_k}(\xi/\sqrt{k})$. Montrer que f_k converge dans $\mathcal{S}'$ et trouver sa limite quand $k \to \infty$.

c) En déduire que S_k converge dans $\mathcal{S}'$ vers une limite que l'on déterminera.

12 **Convolution**
Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{S}'$.

a) Montrer que $\widehat{S}\widehat{T} \in \mathcal{S}'$ et que $S * T \in \mathcal{S}'$. [On pourra montrer que si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et si $\phi_m \to 0$ dans $\mathcal{S}$ alors $S * \phi_m \to 0$ dans $\mathcal{S}$.]

b) Montrer que $\widehat{S*T} = \widehat{S}\widehat{T}$. [On pourra commencer par établir l'identité $\widehat{T*\phi} = \widehat{T}\widehat{\phi}$ lorsque $T \in \mathcal{S}'$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en régularisant T.]

c) Montrer que si $S \in \mathcal{O}_M$ est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact, on a $\widehat{ST} = (2\pi)^{-n}\widehat{S} * \widehat{T}$.

13 Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que si $f \in L^1$ vérifie $P(\partial)f = 0$ alors $f = 0$. Le résultat reste-t-il vrai si f est une distribution tempérée quelconque ? [On montrera que si Q est polynôme non nul l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) \neq 0\}$ est dense.]

14 Soit P un polynôme sur $\mathbb{C}^n$. On cherche les distributions tempérées solutions de l'équation $P(\partial)T = 0$.

a) Qu'obtient-on lorsque P n'a pas de racines imaginaires pures ?

b) Montrer que si 0 est la seule racine imaginaire pure, T est un polynôme.

c) Comment s'étend ce résultat quand P a un nombre fini de racines imaginaires pures ?

d) Montrer que ce type de résultat est faux en général si P a un nombre infini de racines imaginaires pures.

15 Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ telle que $T^{(4)} + T \in L^2$.
Montrer que $T^{(k)} \in L^2$ lorsque $0 \leq k \leq 4$.

16 **Lemme de Sobolev**
Pour $r \in \mathbb{N}$, on note $H^r(\Omega)$ (respectivement $H^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$) l'ensemble des distributions dont les dérivées $\frac{\partial^m T}{\partial x_i^m}$ pour $0 \leq m \leq r$, $\forall i$, sont de carré intégrable (respectivement localement de carré intégrable). On va montrer qu'alors toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ sont localement intégrables et que, lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r > k + \frac{n}{2}$, on a $H^r_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$.

a) On commence par supposer que $\Omega = \mathbb{R}^n$ et on fixe $T \in H^r(\mathbb{R}^n)$.

i) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $(1 + |\xi|)^r \leq c(1 + \sum_i |\xi_i|^r)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

ii) En déduire que toutes les dérivées d'ordre $\leq r$ de T sont dans L^2.

On suppose dorénavant que $r > k + \frac{n}{2}$.

iii) Montrer que $(1 + |\xi|)^{-r+k} \in L^2$.

iv) En déduire que $\forall \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a $\xi^\alpha \widehat{T} \in L^1$. Conclure que $\partial^\alpha T$ est continu si $|\alpha| \leq k$ et que $T \in C^k(\Omega)$.

b) On suppose maintenant que Ω est quelconque et que $T \in H^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

i) On fixe $\Omega' \subset\subset \Omega$. Montrer que les dérivées d'ordre $\leq k$ de T sont dans $L^2(\Omega')$ et que $C^k(\Omega')$ lorsque $r > k + \frac{n}{2}$.

ii) En déduire que les dérivées de T d'ordre $\leq k$ sont localement de carré intégrable et que $T \in C^k(\Omega)$ lorsque $r > k + \frac{n}{2}$. [On utilisera une partition de l'unité (ψ_i) associée à une suite exhaustive de compacts de (K_i) de Ω, qui, rappelons-le, vérifie : $\psi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Supp} \psi_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1} \backslash K_{i-1}$, $\psi_i \geq 0$ et $\sum \psi_i \equiv 1$ sur Ω.]

17 a) Soit $f \in \mathcal{S}'$. Montrer que l'équation $-\Delta u + u = f$ dans $\mathbb{R}^n$ admet une unique solution $u \in \mathcal{S}'$.

b) Que peut-on dire si $f \in \mathcal{S}$?

c) Montrer qu'il existe une infinité de solutions de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $-\Delta u + u = 0$. [On pourra commencer par le cas $n = 1$.]