Université de Rouen
Master 1, MFA 2008–2009
Théorie des distributions

Convolution de distributions

---

1 Soit $f \in L^1_{\text{loc}}$ et $g \in L^1$ à support compact.

a) Montrer directement que, sur tout compact K, la fonction $f*g$ peut être définie presque partout et qu'alors on a $f*g = (f\chi_{K-\operatorname{Supp} g})*g$ presque partout sur K. En déduire que $f*g \in L^1_{\text{loc}}$.

b) Vérifier que $T_{f*g} = T_f * T_g$. [On montrera d'abord que $f*\phi = T_f * \phi$ si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et on utilisera l'associativité de la convolution dans L^1.]

2 Si $T \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)'$ et $\phi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, rappeler pourquoi on peut définir la fonction $T*\phi$. Quelle est alors sa régularité ?

3 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Déterminer quand les produits de convolution suivants sont définis et caractériser les distributions correspondantes.

$$\delta * T, \qquad \delta_a * T \text{ pour } a \in \mathbb{R}^n \text{ fixé}, \qquad (\partial^\alpha \delta) * T, \qquad 1 * T.$$

4 a) Calculer $\mathrm{Y} * f$ pour $f \in L^1$ à support compact.

b) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Y} * T$ est l'unique primitive de T qui soit nulle au voisinage de $-\infty$ au sens où l'on peut trouver $M \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Y} * T = 0$ sur $]-\infty, M[$.

5 Calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $(1*\delta')*\mathrm{Y}$ et $1*(\delta' * \mathrm{Y})$. Commenter.

6 On se place dans $\mathbb{R}$.

a) Calculer $x^m \delta^{(n)}$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer $(x^m \delta^{(n)}) * (x^p \delta^{(q)})$ pour $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

7 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution dont chacune des dérivées partielles $\partial_{x_i} T$ (au sens des distributions) est une fonction continue. On veut montrer que T est une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire est la distribution associée à une fonction de classe C^1). Pour cela, on considère une suite régularisante (ρ_k) et on pose $T_k = T * \rho_k$.

a) Montrer que $\forall x$ on a $T_k(x) = T_k(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \partial_{x_i} T_k(tx)\, dt$.

b) Vérifier que $\partial_{x_i} T_k$ converge dans $C(\mathbb{R}^n)$ vers $\partial_{x_i} T$.

c) On pose

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \partial_{x_i} T_k(tx)\, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \partial_{x_i} T(tx)\, dt.$$

Montrer que $g_k \to g$ dans $C(\mathbb{R}^n)$.

d) En déduire que $g_k \to g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. En utilisant le fait que $T_k \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $T_k(0) \to a$. [On prendra $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int \phi = 1$.]

e) En déduire que T_k est de Cauchy dans $C^1(\mathbb{R}^n)$ et conclure que $T \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

8 **Continuité (séquentielle partielle) du produit de convolution**
On établit la continuité séquentielle partielle du produit de convolution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ceci est souvent suffisant pour les applications. La continuité séquentielle (par rapport aux deux variables) reste vraie, mais la preuve est plus sophistiquée ; elle demande l'utilisation du théorème de Banach-Steinhaus dans les espace de Fréchet.

a) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et (u_i) une suite de distributions convergeant vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $u_i * v \to u * v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. [On vérifiera que $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall x$ on a $u_i * v * \phi(x) \to u * v * \phi(x)$.]

b) Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et (u_i) une suite de distributions à support dans un compact fixe K qui converge vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $u_i * v \to u * v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. [On montrera d'abord que $\operatorname{Supp} u \subset K$, puis que $\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a $u_i(\psi) \to u(\psi)$. On conclura comme précédemment.]

9 Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

a) On fixe $a \in \mathbb{R}^n$ et on note $(a, x) = \sum a_i x_i$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$. On veut montrer l'identité

$$e^{(a,x)} S * T = (e^{(a,x)} S) * (e^{(a,x)} T).$$

i) Etablir le résultat directement lorsque l'une des deux distributions est une fonction (dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ respectivement).

ii) Obtenir le résultat général en écrivant pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'expression $(e^{(a,x)} S) * (e^{(a,x)} T) * (e^{(a,x)} \phi)$ de deux façons.]

iii) On donne maintenant une autre preuve, par régularisation.
Vérifier l'identité lorsque S et T sont des fonctions (dont l'une est à support compact). En déduire le résultat pour $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en régularisant S. Obtenir le résultat général pour $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ en régularisant T et en appliquant l'exercice 8 pour justifier le passage à la limite.

b) On souhaite prouver, par un raisonnement analogue, l'identité

$$x^\alpha (S * T) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (x^\beta S) * (x^{\alpha-\beta} T).$$

i) Etablir directement le résultat lorsque l'une des distributions est une fonction.

ii) Lorsque $|\alpha| = 1$, x^α est de la forme x_i. Montrer que $x_i(S*T) = (x_i S)*T + S*(x_i T)$ pour $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ en écrivant de deux manières l'expression $x_i(S*T*\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Etablir le résultat général par récurrence.

iii) En utilisant la question (b–i), donner une autre preuve de l'identité en régularisant T et en utilisant l'exercice 8.

10 a) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et p un polynôme à n variables. Montrer que $T * p$ est un polynôme.

b) On pose $c = \int e^{-|x|^2}\, dx$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k(x) = \frac{k^n}{c}(1 - \frac{|x|^2}{k})^{k^3}$.
Montrer que $p_k \to \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. [Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ fixé, on prendra $R > 0$ tel que $\operatorname{Supp} \phi \subset B(0, R)$ et on réécrira $\int p_k \phi$ pour $k \ge R^2$. On passera à la limite en utilisant l'inégalité $\ln(1 + a) \le a$ si $a > -1$.]

c) Montrer que toute distribution à support compact est limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ d'une suite de polynômes.

11 **Solutions élémentaires**
Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une solution élémentaire de A si $A * E = \delta$.

a) Toute distribution à support compact admet-elle une solution élémentaire ?

b) Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $u = E * f$ est une solution de l'équation de convolution $A * u = f$. Montrer que l'équation $A * u = f$ admet au plus une solution à support compact et que si tel est le cas, c'est $E * f$.

c) Justifier le fait que la définition ci-dessus coïncide avec celle donnée pour les opérateurs différentiels dans l'exercice **??**.

d) Si $f \in L^1$ est à support compact, trouver une solution de

$$u' - \lambda u = f \quad \text{dans } \mathbb{R} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2,$$
$$\partial^{(1,\dots,1)} u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \qquad \overline{\partial} u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \qquad \Delta\, u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

12 Structure locale d'une distribution

On souhaite montrer que, localement, toute distribution est la dérivée d'une fonction continue.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $e_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{Y}(x)$ est de classe C^{k-2} si $k \geq 2$ et vérifie $e_k^{(k)} = \delta$ si $k \geq 1$. Quelle est sa régularité ?

b) On définit dans $\mathbb{R}^n$ la fonction $E_k(x) = e_k(x_1)\dots e_k(x_n)$.

   i) Montrer que $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fixés, on a

$$(-1)^k \int_{\mathbb{R}} e_k(x_i) \frac{\partial^k \psi}{\partial x_i^k}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)\, dx_i = \psi(x_1, \dots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

   ii) En déduire que $\partial^{(k,\dots,k)} E_k = \delta$.

c) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On note k son ordre et on pose $f = T * E_{k+2}$. Montrer que f est une fonction continue et que $T = \partial^{(k+2,\dots,k+2)} f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

d) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que T est localement la dérivée d'une fonction continue, c'est-à-dire que, pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $f \in C(\Omega)$ telle que $T = \partial^\alpha f$ sur Ω'. [On prendra une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur $\overline{\Omega'}$ et on considérera la distribution $\overline{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ définie par $\langle \overline{T}, \phi \rangle = \langle T, \chi\phi \rangle$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On vérifiera que $\overline{T}$ est une distribution à support compact et on lui appliquera le résultat de la question précédente.]

13 Calcul symbolique

On note $\mathcal{D}'_+$ l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}_+$. On va étendre le produit de convolution à $\mathcal{D}'_+$, ce qui lui conférera une structure d'algèbre unitaire. Ceci permettra notamment de résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ des équations différentielles à coefficients constants et certaines équations intégrales.

a) i) Soit F et G deux fermés de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $F+G$ est un fermé de $\mathbb{R}_+$. [On prendra une suite convergente $(f_n + g_n)$ de $F + G$ et on montrera qu'on peut trouver des sous-suites convergentes de (f_n) et de (g_n).]

   ii) Soit f et g deux fonctions continues (ou localement intégrables) à support dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie, qu'elle est continue (ou localement intégrable) et que son support est contenu dans $\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g$.

   iii) On fixe u et v dans $\mathcal{D}'_+$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $M \geq 0$ tel que $\operatorname{Supp} \phi \subset]-\infty, M[$. Montrer que si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction nulle sur $[-1, M]$ alors $\langle (\psi u) * v, \phi \rangle = 0$. En déduire que la quantité $\langle (\theta u) * v, \phi \rangle$ ne dépend pas de la fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à condition que $\theta = 1$ sur $[-1, M]$. On note $\langle u * v, \phi \rangle$ cette quantité.

   iv) Montrer que $u * v$ est une distribution.

   v) Vérifier que si f et g sont continues à support dans $\mathbb{R}_+$ on retrouve bien la définition de la question (a–ii) (c'est-à-dire que $T_f * T_g = T_{f*g}$).

   vi) Montrer que $\operatorname{Supp}(u * v) \subset \operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} v$.

   vii) Vérifier que $*$ est commutative et associative sur $\mathcal{D}'_+$. [On montrera que, pour $u, v, w \in \mathcal{D}'_+$, et pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $M \geq 0$ tel que $\operatorname{Supp} \phi \subset]-\infty, M[$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur $[-1, M]$, on a $\langle u * v, \phi \rangle = \langle (\theta u) * (\theta v), \phi \rangle$ et $\langle u * (v * w), \phi \rangle = \langle (\theta u) * ((\theta v) * (\theta w)), \phi \rangle$.]

   viii) Conclure que $(\mathcal{D}'_+, \cdot, +, *)$ est une algèbre commutative, associative et unitaire.

b) Si $u \in \mathcal{D}'_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on note u^{*n} le produit de convolution de n exemplaires de u. Si u est inversible, on note u^{*-1} son inverse et u^{*-n} la distribution $(u^{*-1})^{*n}$.

i) Soit u et v dans $\mathcal{D}'_+$. Montrer que si u est inversible, l'équation de convolution $u * f = v$ admet une unique solution dans $\mathcal{D}'_+$.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $(\delta' - \lambda\delta)$ est inversible.

iii) Montrer que $(\delta' - \lambda\delta)^{*-n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t}\, \mathrm{Y}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

iv) Calculer dans $\mathcal{D}'_+$ les inverses de

$$e^{-t}\,\mathrm{Y}(t), \qquad \delta'' + 5\delta' - 6\delta, \qquad \delta' + \mathrm{Y}, \qquad \delta + e^{t}\,\mathrm{Y}(t).$$

c) On note $\mathbb{C}[p]$ l'anneau des polynômes complexes à une indéterminée. D'autre part, $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des distributions de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}$ pour $(a_k) \subset \mathbb{C}$.

i) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)} = 0$ si et seulement si $a_k = 0$ $\forall k$. [Pour montrer l'implication, on raisonnera par l'absurde en supposant que $a_n \neq 0$ et on construira $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ et $\psi^{(n)}(0) = 1$.]

ii) En déduire que les anneaux $\mathbb{C}[p]$ et $\mathcal{A}$ sont isomorphes (l'isomorphisme étant l'application $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{*k}$). On conclut que le corps $\mathcal{K}$ des fractions de $\mathcal{A}$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}(p)$ des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$.