Généralités sur les distributions

1 Soit (a_k) une suite complexe et (x_k) une suite de points distincts de Ω telle que tout compact n'en contienne qu'un nombre fini. Montrer que $\sum a_k \delta_{x_k}$ est une distribution dans Ω. Déterminer son ordre et son support. Déterminer ses dérivées.

2 Montrer que les fonctions $|x|^k$ sont des distributions sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer leurs dérivées successives. [On commencera par déterminer la dérivée de $\operatorname{sgn}(x)$.]

3 Soit $f \in C(\mathbb{R})$. On définit sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ l'application $T(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x,x)\,dx$. Montrer que T est une distribution d'ordre 0. Déterminer son support. Expliciter ses dérivées.

4
a) Soit $x_0 \in \Omega$. Montrer que $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est une distribution sur Ω d'ordre $|\alpha|$ exactement. [On considèrera $\psi \in \mathcal{D}(B(0,1))$ telle que $\psi = 1$ au voisinage de 0. On définira alors $\psi_k(x) = (x-x_0)^\alpha \psi(k(x-x_0))$ pour k grand et on montrera que $\psi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}^m(\Omega)$ si $m < |\alpha|$.]

b) Donner l'exemple d'une distribution d'ordre infini.

5 **Valeur principale**
On définit sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ la forme linéaire $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$ par

$$\operatorname{vp}(\frac{1}{x})\phi = \int_0^\infty \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\,dx.$$

a) Montrer que $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre ≤ 1.

b) Quel est son support ?

c) Montrer que $\ln|x|$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$.

6 **Parties finies**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) On suppose dans cette question que $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Si $\alpha > -1$ on pose $\operatorname{pf}(x_+^\alpha) = x_+^\alpha$. Si $-k-1 < \alpha < -k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\operatorname{pf}(x_+^\alpha)\phi = \int_0^\infty x^\alpha [\phi(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^i}{i!}\phi^{(i)}(0)]\,dx, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

i) Montrer que $\operatorname{pf}(x_+^\alpha)$ est une distribution d'ordre 0 si $\alpha > -1$ et d'ordre $\leq k$ si $-k-1 < \alpha < -k$.

ii) Montrer que $\operatorname{pf}(x_+^\alpha)' = \alpha \operatorname{pf}(x_+^{\alpha-1})$.

b) On suppose maintenant que $\alpha \in \mathbb{Z}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose $\operatorname{pf}(x_+^\alpha) = x_+^\alpha$. Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, on pose

$$\operatorname{pf}(x_+^\alpha)\phi = \int_0^1 x^\alpha [\phi(x) - \sum_{i=0}^{|\alpha|-1} \frac{x^i}{i!}\phi^{(i)}(0)]\,dx + \int_1^\infty x^\alpha [\phi(x) - \sum_{i=0}^{|\alpha|-2} \frac{x^i}{i!}\phi^{(i)}(0)]\,dx.$$

i) Montrer que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est une distribution d'ordre 0 si $\alpha \in \mathbb{N}$ et d'ordre $\leq |\alpha|$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$.

ii) Montrer que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)' = \alpha \mathrm{pf}(x_+^{\alpha-1})$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)' = \alpha \mathrm{pf}(x_+^{\alpha-1}) + \frac{(-1)^{|\alpha|}}{|\alpha|!}\delta^{(|\alpha|)}$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$.

7 La dérivée d'ordre α d'une distribution d'ordre k est-elle d'ordre $k + |\alpha|$?

8 **Support**
Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

a) Montrer que $\mathrm{Supp}(S + T) \subset \mathrm{Supp}\, S \cup \mathrm{Supp}\, T$.

b) Montrer que $\mathrm{Supp}(\partial^\alpha T) \subset \mathrm{Supp}\, T$.

c) Montrer que $\mathrm{Supp}(fT) \subset \mathrm{Supp}\, f \cap \mathrm{Supp}\, T$. Montrer que $fT = T$ si $f = 1$ au voisinage de $\mathrm{Supp}\, T$.

d) Si $f = 0$ sur Supp T, a-t-on $fT = 0$?

e) Soit $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $\mathrm{Supp}\, T_g$ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $g = 0$ presque partout. Montrer qu'il existe $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que $g = h$ presque partout et $\mathrm{Supp}\, T_g = \overline{\{h \neq 0\}}$. Qu'obtient-on si g est continue ?

9 Calculer $(x\,\delta)\,\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ ainsi que $(x\,\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))\,\delta$, et commenter.

10 **Formule de Leibniz**
Soit α un multi-indice, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f\, \partial^{\alpha-\beta} T.$$

[On pourra soit raisonner par densité en utilisant le fait qu'il existe une suite (g_k) de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; soit raisonner directement en utilisant l'identité suivante que l'on justifiera, $\sum_{0\leq\beta\leq\gamma} \binom{\gamma}{\beta}(-1)^{|\gamma|-|\beta|} = 0$ si $\gamma \neq 0$.]

11 **Image réciproque d'une distribution**
Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application affine (pour simplifier) inversible. On note $\det h$ le déterminant de l'application linéaire associée.

a) Montrer que $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\phi \circ h^{-1} \in \mathcal{D}(h\Omega)$.

b) Etant donné $T \in \mathcal{D}'(h\Omega)$, on pose

$$h^*T(\phi) = \frac{1}{|\det h|} T(\phi \circ h^{-1}) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Montrer que $h^*T \in \mathcal{D}'(h\Omega)$.

c) Montrer que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(h\Omega)$ on a $h^*T_f = T_{f\circ h}$.

12 a) *Translation.* A tout $a \in \mathbb{R}^n$ on associe l'opérateur de translation de $\mathcal{D}(\Omega - a)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ défini par $\tau_a\phi(x) = \phi(x - a)$. Comment définir $\tau_a T$ pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$?

b) *Dilatation.* A tout $\lambda \neq 0$ on associe la dilatation de $\mathcal{D}(\lambda\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par $\phi_\lambda(x) = \phi(x/\lambda)$. Comment se définit la dilatation T_λ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$?

13 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On pose $\partial_a T = \sum a_i \partial_i T$. Montrer que $\lim_{h\to 0}(\tau_{-ah}T - T)/h \to \partial_a T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

14 Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Déterminer la limite au sens des distributions de $\epsilon^{-n}\chi(x/\epsilon)$ quand $\epsilon \to 0$.

15 **Division**
Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ fixées. On cherche à déterminer toutes les distributions S vérifiant l'équation $aS = T$.

a) Montrer que le problème admet une unique solution si a ne s'annule pas.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de 0.

   i) Rappeler pourquoi $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\phi = \sum_{m \leq k} \frac{x^m}{m!} \phi^{(m)}(0)\chi + x^{k+1}\psi$ avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bien choisi.

   ii) En déduire que $x^{k+1}T = 0$ si et seulement si T est de la forme $\sum_{m \leq k} a_m \delta^{(m)}$.

c) Déterminer toutes les solutions de $xS = 1$. Même question pour $xS = \delta$.

d) On va construire une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ pour laquelle le problème $aS = \delta$ n'admet pas de solution. On choisit $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\zeta = 0$ sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\zeta > 0$ sur $\mathbb{R}^*_+$. On pose alors $a(x) = \zeta(x) + \zeta(-x)$. Et on suppose qu'il existe $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $aS = \delta$.

   i) Montrer que $\operatorname{Supp} S = \{0\}$.

   ii) Pour $\epsilon > 0$, on pose $a_\epsilon(x) = \zeta(x-\epsilon) + \zeta(-x-\epsilon)$. Montrer que $a_\epsilon \to a$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

   iii) Conclure que $aS = 0$.

16 Primitive

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. On souhaite trouver toutes les distributions S vérifiant $S' = T$.

a) On fixe $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta(x)\,dx = 1$. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$, montrer qu'il existe une unique fonction $A\phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $(A\phi)' = \phi - \theta \int_I \phi$. Montrer que $A(\phi') = \phi$.

b) Montrer que $A : \mathcal{D}(I) \to \mathcal{D}(I)$ est continu.

c) Montrer que $S' = 0$ si et seulement si S est constante (c'est-à-dire $\exists C \in \mathbb{C}$ telle que $S\phi = C \int_I \phi$).

d) Montrer que l'équation $S' = T$ admet une infinité de solutions qui toutes diffèrent d'une constante.

e) Pour $x_0 \in I$, résoudre $S' = \delta_{x_0}$. Résoudre $S' = f$ lorsque $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. [Pour $x_0 \in I$ fixé, on introduira la fonction $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{[x_0,x]} f(t)\,dt$. On montrera qu'elle est continue et que $g' = f$ dans $\mathcal{D}'(I)$, soit directement en utilisant le théorème de Fubini, soit par approximation en utilisant la densité de $C(I)$ dans $L^1_{\text{loc}}(I)$.]

17 Soit $x_0 \in \Omega$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution de support $\{x_0\}$. On veut montrer que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

pour k et $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ bien choisis. On rappelle le résultat suivant. Si on fixe k et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\chi = 1$ au voisinage de x_0, alors, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\forall \alpha$ de longueur $k+1$, on peut trouver $g_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \phi(x_0)\chi(x) + \sum_{|\alpha| = k+1} (x - x_0)^\alpha g_\alpha(x).$$

a) Rappeler pourquoi T est d'ordre fini. On notera k son ordre.

b) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que ∂^α