Convolution de fonctions

Sauf mention contraire, tous les exposants p, q et r seront dans $[1,+\infty]$.

1 Intégration par parties
Soit $f \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ et $g \in C^k(\Omega)$. On veut montrer que pour tout multi-indice α de longueur $\leq k$, on a

$$\int_\Omega f(x)\partial^\alpha g(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\partial^\alpha f(x)\,dx.$$

a) Etablir le résultat lorsque Ω est un pavé ouvert de la forme $\prod]a_i,b_i[$. [On traitera successivement les cas $n=1$, n quelconque et $\alpha_j=0$ pour $j\neq i$, et α quelconque.]

b) Etablir le résultat pour Ω quelconque, en considérant une fonction à support compact dans Ω qui vaut 1 au voisinage de $\operatorname{Supp} f$.

2 Soit $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C(\mathbb{R}^n)$. Pour tout multi-indice α, établir la formule de Leibniz

$$x^\alpha(f*g) = \sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(x^\beta f)*(x^{\alpha-\beta}g).$$

3 Inégalité de Hölder
On dit que deux exposants p et p' sont conjugués si $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. On souhaite montrer l'inégalité de Hölder : si $f\in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ alors $fg\in L^1(\Omega)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}$.

a) i) Etablir le résultat si $p=1$ ou $p=+\infty$.
   ii) On suppose dorénavant que $p\in]1,+\infty[$. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer l'inégalité de Young : si a et b sont deux nombres positifs on a $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}$.
   iii) En déduire l'inégalité de Hölder dans le cas où $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$.
   iv) Traiter le cas général.

b) Que retrouve-t-on si $p=2$?

c) Montrer que l'inégalité de Hölder est optimale au sens où, si $p\in[1,+\infty[$, alors $\forall f \in L^p(\Omega)$ on peut trouver une fonction $g\in L^{p'}(\Omega)$ pour laquelle on a $\|fg\|_1 = \|f\|_p\|g\|_{p'}$. Que peut-on dire si $p=+\infty$?

d) Etablir l'inégalité de Hölder généralisée suivante. Si $f_1\in L^{p_1}(\Omega)$, …, $f_k \in L^{p_k}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}=1$, alors $f_1\dots f_k\in L^1(\Omega)$ et $\|f_1\dots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1}\dots\|f_k\|_{p_k}$.

4 Densité de $\mathcal{D}^0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $p<+\infty$
Soit $p\in[1,+\infty[$ fixé.

a) En utilisant la densité de $\mathcal{D}^0(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, montrer que, pour toute fonction f mesurable bornée à support compact, on peut trouver une suite (f_i) de $\mathcal{D}^0(\Omega)$ telle que $\|f_i\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $\operatorname{Supp} f_i \subset K$ pour un compact K fixe, et $f_i\to f$ dans $L^1(\Omega)$. [On partira d'une suite (g_i) de $\mathcal{D}^0(\Omega)$ et d'une fonction $\phi\in\mathcal{D}^0(\Omega)$ à valeurs dans $[0,1]$ et valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$. On montrera que $f_i = (g_i\phi\wedge\|f\|_\infty)\vee -\|f\|_\infty$ convient.]
En déduire que $f_i\to f$ dans $L^p(\Omega)$.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions bornées à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$. Conclure que $\mathcal{D}^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

c) Que se passe-t-il si $p = +\infty$?

5 Inégalité de convolution

Soit p et q deux exposants vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$. On peut alors définir $r \in [1,+\infty]$ par la formule $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. On note p', q' et r' les exposants conjugués de p, q et r respectivement. On veut montrer que, si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a $f * g \in L^r$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

a) *Mesurabilité.* Soit f et g deux fonctions boréliennes. On rappelle les notations $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

 i) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ est borélienne.

 ii) Si f et g sont positives, montrer, en utilisant le théorème de Fubini, que la fonction $x \mapsto f * g(x) = \int f(x - y)g(y)\, dy$ (à valeurs dans $[0, +\infty]$) est borélienne.

 iii) Si f et g sont quelconques et si les fonctions positives $f^+ * g^+$, $f^+ * g^-$, $f^- * g^+$ et $f^- * g^-$ sont presque partout finies, conclure que $f * g$ est presque partout finie et est égale à une fonction borélienne presque partout (elle est donc mesurable au sens de Lebesgue).

b) *Le cas $r = +\infty$.* Cette condition est bien sûr équivalente à $q = p'$.

 i) Si f et g sont positives, montrer que $f * g \in L^\infty$ et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

 ii) En utilisant la question (a–iii), montrer que, pour $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ quelconques, $f * g$ est presque partout définie, qu'elle est dans L^∞ et qu'elle vérifie $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

 iii) Par un argument de densité, montrer qu'en fait $f * g$ est continue et que, si $p \in]1, +\infty[$, on a $\lim_{|x|\to+\infty} f * g(x) = 0$.

c) *Le cas $r < +\infty$.* Notons que cela implique que $p < +\infty$ et $q < +\infty$. Jusqu'à la question (c–v), les fonctions f, g et ϕ considérées seront positives.

 i) Montrer que
$$\int f * g(x)\phi(x)\, dx = \int f(x)g(y)\phi(x + y)\, dx\, dy.$$

 ii) Vérifier les identités $1 = \frac{p}{r} + \frac{p}{q'} = \frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = \frac{r'}{p'} + \frac{r'}{q'}$.

 iii) En utilisant la décomposition
$$f(x)g(y)\phi(x + y) = [(f(x))^{\frac{p}{r}}(g(y))^{\frac{q}{r}}][(f(x))^{\frac{p}{q'}}(\phi(x + y))^{\frac{r'}{q'}}][(g(y))^{\frac{q}{p'}}(\phi(x + y))^{\frac{r'}{p'}}],$$
 montrer que $\int f * g\, \phi \leq \|f\|_p \|g\|_q \|\phi\|_{r'}$.

 iv) En déduire que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. [On prendra $\phi = (f * g)^{r-1}$.]

 v) En utilisant la question (a–iii), montrer que, pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$ quelconques, on a $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

d) Montrer qu'en général on ne peut pas définir le produit de convolution de f et g si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

e) Soit $t > 0$ et $f \in L^p$. On pose $f_t = f(\cdot/t)$. Calculer $\|f_t\|_p$ en fonction de $\|f\|_p$ et $(f * g)_t$ en fonction de $f_t * g_t$. En déduire que, pour avoir une inégalité du type $\|f * g\|_s \leq C\|f\|_p \|g\|_q$ $\forall f \in L^p$ $\forall g \in L^q$, il faut que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

6 Continuité du produit de convolution

On souhaite déterminer quand le produit de convolution de fonctions est continu dans les espaces usuels.

a) Soit p et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Montrer que le produit de convolution est continu de $L^p \times L^q \to L^r$.

b) Etablir que le produit de convolution est séquentiellement continu de $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)\times C^l(\mathbb{R}^n)\to C^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ et de $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}^l(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}^{k+l}(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que le produit de convolution n'est pas continu de $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)\times C^l(\mathbb{R}^n)\to C^{k+l}(\mathbb{R}^n)$.

7 Suites régularisantes et densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $p<+\infty$

Soit $p\in[1,+\infty[$ fixé et (ϕ_i) une suite régularisante.

a) Montrer que ϕ_i ne peut pas converger dans L^1.

b) Soit $f\in L^p$ fixée. Montrer que $f*\phi_k\to f$ dans L^p. [On commencera par supposer $f\in\mathcal{D}^0(\mathbb{R}^n)$.]

c) Soit (K_j) une suite exhaustive de compacts de Ω et (χ_j) une suite de fonctions de classe C^∞ telle que $\forall j$ χ_j est à valeurs dans $[0,1]$, a son support dans K_{j+1} et vaut 1 sur K_j. On fixe $f\in L^p(\Omega)$.

Montrer que $f\chi_j\to f$ dans $L^p(\Omega)$. En déduire que l'on peut trouver une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ de la forme $(f\chi_j)*\phi_{i_j}$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$.

d) On peut donner une preuve un peu différente du résultat de densité précédent. Montrer que la topologie de $L^p(\Omega)$ induite sur $\mathcal{D}^0(\Omega)$ est moins fine que la topologie de $\mathcal{D}^0(\Omega)$. Déduire de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}^0(\Omega)$ et de la densité de $\mathcal{D}^0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

8 Montrer que L^1 muni de la convolution est une algèbre de Banach commutative (c'est-à-dire vérifie $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$) sans élement unité (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $e\in L^1$ pour laquelle $e*f=f$ $\forall f\in L^1$).

9 Formule de changement de variables dans les intégrales multiples

Soit U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et Φ un difféomorphisme de classe C^1 de U sur U'. On note $J_\Phi(x)$ le jacobien de Φ en x (c'est-à-dire le déterminant de $d\Phi(x)$). On souhaite établir le résultat suivant. Pour toute fonction $f\in L^1(U')$, on a $f\circ\Phi\,|J_\Phi|\in L^1(U)$ et

$$\int_{\Phi(U)} f(z)\,dz=\int_U f(\Phi(y))|J_\Phi(y)|\,dy.$$

En particulier, on a $\int_{TU} f(z)\,dz=|\det T|\int_U f(Ty)\,dy$ pour toute transformation affine inversible T, $\det T$ désignant le déterminant de l'application linéaire associée à T.

a) Rappeler brièvement pourquoi il est équivalent de montrer la formule

$$\int_{\Phi(U)} f(z)\,dz=\int_U f(\Phi(y))|J_\Phi(y)|\,dy\qquad\forall f\in\mathcal{D}^0(U').\tag{$*$}$$

[On vérifiera notamment que $f\in\mathcal{D}^0(U')$ si et seulement si $f\circ\Phi\in\mathcal{D}^0(U)$.]

b) Montrer que si Φ et Φ' sont deux difféomorphismes satisfaisant à $(*)$, alors $\Phi'\circ\Phi$ est un difféomorphisme pour lequel $(*)$ est vraie.

c) *Localisation.* Montrer qu'il suffit de vérifier $(*)$ localement, c'est-à-dire que tout $x\in U$ admet un voisinage ouvert $V\subset U$ pour lequel $(*)$ soit vrai $\forall f\in\mathcal{D}^0(\Phi(V))$. [Une fonction $f\in\mathcal{D}^0(U')$ étant fixée, on recouvrira le compact $\Phi^{-1}(\operatorname{Supp} f)$ d'un nombre fini de voisinages (V_i) du type précédent et on utilisera une partition de l'unité $h_i\in\mathcal{D}^0(V_i)$ telle que $\sum h_i=1$ sur $\Phi^{-1}(\operatorname{Supp} f)$.]

d) Etablir $(*)$ en dimension 1. [Vu la question précèdente, on supposera que U est un intervalle ouvert borné et on distinguera les cas $\Phi'>0$ et $\Phi'<0$ sur U.]

e) *Première réduction.*

i) Etablir $(*)$ lorsque $U=U'=\mathbb{R}^n$ et que le difféomorphisme est une translation.

ii) En déduire que, dans le cas général, il suffit d'établir $(*)$ lorsque U est un voisinage ouvert de 0 et que Φ est un difféomorphisme vérifiant $\Phi(0)=0$.

f) *Seconde réduction.*

i) Etablir $(*)$ lorsque $U = U' = \mathbb{R}^n$ et que le difféomorphisme est un isomorphisme de la forme $p_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ où σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. On note P_σ la matrice de p_σ dans la base canonique.

ii) Soit $A \in M_n$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une matrice $B \in M_n$ et une permutation σ telles que $A = BP_\sigma$ et telles que les sous-matrices principales $(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ de B soient inversibles $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$. [On raisonnera par récurrence sur n et on utilisera un développement de $\det A$ par rapport à la dernière ligne.]

iii) En déduire que, dans le cas général, il suffit d'établir $(*)$ lorsque U est un voisinage ouvert de 0 et que Φ est un difféormorphisme vérifiant $\Phi(0) = 0$ et tel que les sous-matrices principales $(\frac{\partial \phi_i(0)}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq k}$ de la matrice jacobienne sont inversibles $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

g) On suppose que Φ vérifie les conditions de la question précédente. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose alors $\Psi^k(y_1, \ldots, y_n) = (\Phi_1(y), \ldots, \Phi_k(y), y_{k+1} \ldots, y_n)$.

i) Montrer que $\forall k$ Ψ^k est un difféomorphisme local en 0 (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de 0 tel que Ψ^k soit un difféomorphisme de $V \to \Psi^k(V)$.]