Espaces fonctionnels topologiques

Dans tous les exercices, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et K un ensemble compact. De plus, sauf mention contraire, les fonctions considérées seront toujours complexes.

1 Formule du binôme de Newton

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ deux multi-indices. On écrit $\alpha \geq \beta$ si $\alpha_1 \geq \beta_1, \ldots, \alpha_n \geq \beta_n$. On pose $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ et, pour $\beta \leq \alpha$, on définit le coefficient binomial $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note x^α le monome $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Montrer que la formule du binôme reste valable pour les multi-indices, c'est-à-dire que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(x+y)^\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta \, y^{\alpha-\beta}.$$

2 Formule de Leibniz

Soit α un multi-indice et $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Montrer que

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta} g.$$

3 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $x_0 \in \Omega$ fixé et $k \in \mathbb{N}^*$. Si f est une fonction k fois différentiable en un point x de $\mathbb{R}^n$ et si $h \in \mathbb{R}^n$, on note $d^k f(x)[h]$ la valeur de la forme k-linéaire $df^k(x)$ au k-uplet $(h, \ldots, h)$.

a) Montrer que $\forall x \in \Omega$ tel que $[x_0, x] \subset \Omega$ et $\forall f \in C^k(\Omega)$, on a la formule de Taylor avec reste intégral

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} d^m f(x_0)[x-x_0] + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} d^k f(x_0 + t(x-x_0))[x-x_0] \, dt \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) + k \sum_{|\alpha|=k} \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(x_0 + t(x-x_0)) \, dt. \end{aligned}$$

b) En déduire que $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ on peut trouver $\forall |\alpha| = k$ des fonctions $g_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) + \sum_{|\alpha|=k} (x-x_0)^\alpha g_\alpha(x)$.

c) *Lemme de Hadamard.* Montrer que $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\partial^\alpha f(x_0) = 0 \; \forall |\alpha| \leq k-1$, on peut trouver $\forall |\alpha| = k$ des fonctions $g_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(x) = \sum_{|\alpha|=k} (x-x_0)^\alpha g_\alpha(x)$.

4 Support de fonctions

Dans tout l'exercice, f et g désignent des fonctions régulières.

a) Montrer que $\operatorname{Supp}(f+g) \subset \operatorname{Supp} f \cup \operatorname{Supp} g$ et $\operatorname{Supp}(fg) \subset \operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g$.

b) Pour tout multi-indice α, montrer que $\operatorname{Supp}(\partial^\alpha f) \subset \operatorname{Supp} f$.

5 Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\cdot + k) \equiv 1$. [On partira d'une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $[0,1]$, et on vérifiera que la fonction $g(x)(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+k))^{-1}$ convient.]

6 **Théorème de Borel**

Soit (a_k) une suite complexe quelconque. On veut construire une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout k.

Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-1,1]$ telle que $g = 1$ au voisinage de 0. Etant donné $\epsilon_k > 0$, on pose $f_k(x) = a_k g(x/\epsilon_k)x^k/k!$. Montrer que l'on peut choisir la suite (ϵ_k) dans $]0,1]$ de sorte que $\epsilon_k \to 0$ et que $\sup_{\mathbb{R}} |f_k^{(l)}| \le 2^{-k}$ quand $k \ge l+1$. Vérifier alors que la série $f = \sum f_k$ convient.

7 **L'espace $C(K)$**

Soit K un espace compact. On munit l'ensemble des fonctions continues sur K de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_K |f|$. Montrer que $C(K)$ est un espace de Banach.

8 **L'espace $C^k(\overline{\Omega})$**

On suppose Ω borné. Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit $C^k(\overline{\Omega})$ comme l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont les dérivées d'ordre $\le k$ se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$. On munit $C^k(\overline{\Omega})$ de la norme

$$\|f\|_k = \sup_{|\alpha|\le k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f|.$$

a) Montrer que $C^k(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach.

[On utilisera, après l'avoir justifié, le résultat classique suivant. Soit (f_m) une suite de fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$. S'il existe $f, f^1, \ldots, f^n$ telles que $f_m \to f$ et $\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \to f^i$ $\forall i$ uniformément sur Ω, alors $f \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i} \to f^i$.]

b) Soit K un compact de Ω. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{D}_K^k$ des fonctions de classe C^k à support dans K muni de la norme $\|\cdot\|_k$ est un espace de Banach.

c) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{D}^k(\Omega)$ des fonctions de classe C^k à support compact dans Ω n'est pas fermé. [On commencera par montrer le résultat pour $\Omega =]0,1[$. On prendra f de classe C^∞ non identiquement nulle à support dans $]1/2,1[$, et on vérifiera que la suite définie par $f_m(x) = \sum_{0\le l\le m} 2^{-l(k+1)} f(2^l x)$ converge dans $C^k([0,1])$ vers une fonction qui n'est pas à support compact dans $]0,1[$.]

9 **Espaces vectoriels semi-normés**

Soit E un espace vectoriel. On rappelle qu'une application $p : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si elle vérifie

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E \qquad \text{et} \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E.$$

On dit que E est semi-normé s'il est muni d'une famille de semi-normes $(p_i)_I$. Pour $i \in I$ et $r > 0$, on note $B_{i,r} = \{x \mid p_i(x) < r\}$ la semi-boule ouverte de centre 0 et de rayon r pour la semi-norme p_i. On associe alors naturellement à E la topologie engendrée par les semi-boules ouvertes de centre quelconque, qui sont de la forme $x + B_{i,r}$ avec $x \in E$. En d'autres termes, un sous-ensemble U de E est ouvert si

$$\forall x \in U,\ \exists J \subset I \text{ fini},\ \exists (r_j)_J \text{ avec } r_j > 0 \text{ tels que} \quad x + \bigcap_{j\in J} B_{j,r_j} \subset U.$$

On dit alors que E est semi-normé par les (p_i).

a) Rappeler pourquoi cela définit bien une topologie sur E.

b) Montrer qu'une semi-norme est une fonction convexe. En déduire que tout point admet un système fondamental de voisinages convexes. On dit alors que l'espace topologique E est un espace localement convexe.

c) Montrer que la topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire que l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont des opérations continues. On dit que E est une espace vectoriel topologique.

d) Montrer que les semi-normes p_i sont continues. [On vérifiera, pour une semi-norme p, l'inégalité $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$, $\forall x, y \in E$.]

e) Pour tout sous-ensemble J fini de I, on note $p_J = \max_{j \in J} p_j$. Montrer que p_J est une semi-norme et que la collection des (p_J) engendre la même topologie que les (p_i).

Quitte à changer la famille des semi-normes, en déduire que l'on peut toujours supposer que les (p_i) vérifient la propriété de filtration

$$\forall J \subset I \text{ fini}, \exists k \in I \text{ tel que } \quad \max_{j \in J} p_j \leq p_k.$$

Montrer qu'alors les $B_{i,r}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 (et donc que U est ouvert si et seulement si $\forall x \in U$, $\exists i$, $\exists r > 0$ tel que $x + B_{i,r} \subset U$).

On supposera dorénavant que la famille p_i vérifie la propriété de filtration précédente.

f) *Propriété de Hausdorff.* Montrer que la topologie est séparée si et seulement si

$$p_i(x) = 0 \ \forall i \in I \Rightarrow x = 0.$$

g) *Suites.* Montrer qu'une suite (x_k) converge vers x si et seulement si $p_i(x_k - x) \to 0 \ \forall i$. Quelle est la définition naturelle d'une suite de Cauchy ?

h) *Continuité d'une application linéaire.* Soit $(E, (p_i))$ et $(F, (q_j))$ deux espaces semi-normés. Montrer qu'une application linéaire $u : E \to F$ est continue si et seulement si elle est continue en 0, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall j, \exists i, \exists C > 0 \text{ tels que } \quad q_j(ux) \leq C p_i(x) \ \forall x \in E.$$

Que devient ce résultat pour les formes linéaires sur E ?

i) *Comparaison de topologies.* Soit (p_i) et (q_j) deux familles de semi-normes sur E. Montrer que la topologie engendrée par les (p_i) est plus fine que la topologie engendrée par les (q_j) si et seulement si

$$\forall j, \exists i, \exists C > 0 \text{ tels que } \quad q_j(x) \leq C p_i(x) \ \forall x \in E.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les topologies soient équivalentes.

j) *Produit.* Soit E et F deux espaces semi-normés. $\forall (i, j) \in I \times J$, on définit sur $E \times F$ la fonction $r_{i,j}(x, y) = p_i(x) \vee q_j(y)$. Montrer que les $(r_{i,j})$ sont des semi-normes sur $E \times F$ et que la topologie qu'elles engendrent est la topologie produit.

k) *Continuité d'une application bilinéaire.* Soit E, F et G trois espaces semi-normés. Montrer qu'une application bilinéaire $b : E \times F \to G$ est continue si et seulement si elle est continue en $(0, 0)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall k, \exists i, j, \exists C > 0 \text{ tels que } \quad r_k(b(x, y)) \leq C p_i(x) q_j(y) \ \forall (x, y) \in E \times F.$$

[Pour montrer que les inégalités ci-dessus impliquent la continuité de b, on utilisera la décomposition $b(x, y) - b(x_0, y_0) = b(x - x_0, y) + b(x_0, y - y_0)$.]
Que devient ce résultat pour les formes bilinéaires ?

l) *Espaces normés.* Montrer que si I est fini et E séparé, alors E est un espace normé.

m) *Espaces semi-normés métrisables.* On suppose que I est dénombrable de sorte que l'on peut en fait prendre $I = \mathbb{N}^*$ et (p_i) croissant d'après la question (d) (c'est-à-dire $i \leq j \Rightarrow p_i \leq p_j$). On suppose de plus que E est séparé. On définit alors sur $E \times E$ la fonction $d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{p_i(x-y) \wedge 1}{i}$.
Montrer que d est une distance invariante par translation (c'est-à-dire qu'elle vérifie $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $\forall x, y, z$) et qu'elle définit la même topologie que les (p_i).

Montrer qu'alors une suite est de Cauchy au sens de la question (g) si et seulement si elle est de Cauchy au sens classique dans l'espace métrique (E, d). Si E est complet, on dit que c'est un espace de Fréchet.

Si E et F sont deux espaces semi-normés avec E métrisable, montrer qu'une application linéaire $u : E \to F$ est continue si et seulement si $x_k \to 0 \Rightarrow ux_k \to 0$.

Si E, F et G sont trois espaces semi-normés avec E et F métrisables, montrer qu'une application bilinéaire $b : E \times F \to G$ est continue si et seulement si $x_k \to 0$ et $y_k \to 0$ $\Rightarrow b(x_k, y_k) \to 0$.

10 Les espaces $C^k(\Omega)$

Soit $k \in \mathbb{N}$. A tout compact $K \subset \Omega$, on associe la semi-norme

$$p_{k,K}(f) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha f|.$$

On considère d'autre part une suite exhaustive quelconque de compacts $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que les $(p_{k,K})_K$ font de $C^k(\Omega)$ un espace semi-normé séparé.

b) Montrer que les $(p_{k,K})_K$ et les $(p_{k,K_i})_i$ engendrent la même topologie. En déduire que $C^k(\Omega)$ est métrisable.

c) Caractériser les suites convergentes. Donner un critère de continuité des formes linéaires.

d) Montrer que $C^k(\Omega)$ est un espace de Fréchet. Est-ce un espace normé ?

e) La suite de fonctions définies par $u_m(x) = \sin(x/m)$ (pour $m \in \mathbb{N}^*$) converge-t-elle dans $C^k(\mathbb{R})$?

f) Montrer que le produit de fonctions $(f, g) \mapsto fg$ est continu de $C^k(\Omega) \times C^k(\Omega) \to C^k(\Omega)$.

g) Soit $l \leq k$ et $a_\alpha \in C^{k-l}(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leq l$. On définit l'opérateur différentiel d'ordre l associé $P(\partial)f = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \partial^\alpha f$. Montrer que $\partial^\alpha : C^k(\Omega) \to C^{k-|\alpha|}(\Omega)$ est continu puis que $P(\partial) : C^k(\Omega) \to C^{k-l}(\Omega)$ est continu.

h) Montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$.

i) Soit $K \subset \Omega$ un compact fixé. Quelle est la topologie induite sur $\mathcal{D}^k_K$?

11 L'espace $C^\infty(\Omega)$

On garde les notations de l'exercice précédent. On munit $C^\infty(\Omega)$ de la collection des semi-normes $(p_{k,K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout K compact de Ω.

a) Vérifier que $C^\infty(\Omega)$ est un espace semi-normé métrisable.

b) Caractériser les suites convergentes. Donner un critère de continuité des formes linéaires.

c) Montrer que $C^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet. Est-ce un espace normé ?

d) La suite de fonctions $u_m(x) = x^m/(1 - x^2)$ converge-t-elle dans $C^\infty(]-1, 1[)$?
Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La suite définie par $v_m(x) = mv(x + m)$ converge-t-elle dans $C^\infty(\mathbb{R})$?

e) Montrer que le produit de fonctions $(f, g) \mapsto fg$ est continu de $C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$.

f) Montrer que l'opérateur de dérivation ∂^α est continu de $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$.

g) Montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

h) Soit $K \subset \Omega$ un compact fixé. Montrer que la topologie induite sur $\mathcal{D}_K$ est la topologie d'espace semi-normé par la collection des $(\| \cdot \|_k)_{\mathbb{N}}$ (où les normes $\| \cdot \|_k$ sont définies à l'exercice 8) ? $\mathcal{D}_K$ est-il un espace de Fréchet ? Est-ce un espace normé ?

12 Les espaces $\mathcal{D}^k(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$

On rappelle la notation $\|f\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_\Omega |\partial^\alpha f|$, pour $k \in \mathbb{N}$.

On dit qu'une semi-norme p sur $\mathcal{D}^k(\Omega)$ est admissible si, pour tout compact K de Ω, sa restriction à $\mathcal{D}^k_K$ est continue, c'est-à-dire si

$$\forall K \subset \Omega,\ \exists C_K > 0 \text{ tel que } \quad p(f) \leq C_K \|f\|_k \ \forall f \in \mathcal{D}^k_K.$$

On définit alors sur $\mathcal{D}^k$ la topologie engendrée par les semi-normes admissibles.

Une semi-norme p sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est admissible si, pour tout compact K de Ω, sa restriction à $\mathcal{D}_K$ est continue, c'est-à-dire si

$$\forall K \subset \Omega,\ \exists k_K \in \mathbb{N},\ \exists C_K > 0 \text{ tels que } \quad p(f) \leq C_K \|f\|_{k_K}\ \forall f \in \mathcal{D}_K.$$

On définit sur $\mathcal{D}$ la topologie engendrée par les semi-normes admissibles.

a) Montrer que $\|\cdot\|_k$ est une semi-norme admissible sur $\mathcal{D}^k(\Omega)$. En déduire que la topologie sur $\mathcal{D}^k(\Omega)$ est séparée. Montrer de même que la topologie définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est séparée.

b) Soit $K \subset \Omega$ fixé. Montrer que la topologie induite sur $\mathcal{D}_K^k$ coïncide avec sa topologie naturelle d'espace normé par $\|\cdot\|_k$. Etablir un résultat analogue pour $\mathcal{D}_K$.

c) *Ensembles bornés.* On dit qu'un sous-ensemble B d'un espace semi-normé $(E, (p_i)_I)$ est borné si chacune des semi-normes p_i est bornée sur B.

   i) Soit (a_m) une suite de réels ≥ 0 et (x_m) une suite de points de Ω telle que tout compact de Ω ne contienne qu'un nombre fini de x_m.

   Montrer que la fonction $p(f) = \sup a_m |f(x_m)|$ est une semi-norme admissible sur $\mathcal{D}^k(\Omega)$.

   ii) En déduire qu'un ensemble B de $\mathcal{D}^k(\Omega)$ est borné si et seulement si

   $$\exists K \subset \Omega \text{ tel que } \quad B \subset \mathcal{D}_K^k \quad \text{et} \quad \sup_B \|f\|_k < +\infty.$$

   [Pour montrer l'implication, on raisonnera par l'absurde. Supposant que pour une suite exhaustive de compacts (K_m) on a $B \cap (\mathcal{D}_{K_m}^k)^c \neq \emptyset\ \forall m$, on montrera qu'il existe une suite de fonctions (f_m) de B et une suite de points (x_m) comme ci-dessus telles que $f_m(x_m) \neq 0\ \forall m$. On considèrera alors la semi-norme p correspondant au choix $a_m = \frac{m}{|f_m(x_m)|}$.]

   iii) Donner une caractérisation analogue pour les ensembles bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$.

d) *Suites.*

   i) Montrer qu'une suite (f_m) converge vers f dans $\mathcal{D}^k(\Omega)$ (respectivement est de Cauchy) s'il existe un compact K tel que $(f_m) \subset \mathcal{D}_K^k$ et $f_m \to f$ dans $\mathcal{D}_K^k$ (respectivement $(f_m) \subset \mathcal{D}_K^k$ et (f_m) est de Cauchy dans $\mathcal{D}_K^k$). [On montrera que, dans les deux cas, l'ensemble $B = \{f_m \mid m\}$ est borné.]

   ii) Donner une caractérisation analogue pour les suites convergentes (respectivement de Cauchy) dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

   iii) En déduire que $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}^k(\Omega)$ sont (séquentiellement) complets.

e) *Continuité des applications linéaires.*

   i) Soit u une forme linéaire sur $\mathcal{D}^k(\Omega)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   – u est continue ;
   – $\forall K \subset \Omega$, la restriction de u à $\mathcal{D}_K^k$ est continue ;
   – $\forall K \subset \Omega$, $\exists C > 0$ tel que $|u(f)| \leq C\|\|_k$